

# Polynômes

## I) Définitions

Définition telle qu'elle est donnée dans un sujet du concours général :

La fonction  $f$  est une **fondion polynomiale** :

\* si  $f$  est nulle

\* ou s'il existe un entier  $n \geq 0$  et des nombres réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  avec  $a_n \neq 0$  tels que,

$$\text{pour tout nombre réel } x, f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Les nombres  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont alors appelés **coefficients** de la fonction polynomiale  $f$ .

L'entier  $n$  est appelé **le degré du polynôme** et le coefficient  $a_n$  est appelé le **coefficient dominant**.

Le degré d'un polynôme constant non nul est donc égal à 0 et, par convention, le degré du polynôme nul est égal à  $-\infty$

Remarque importante : L'écriture d'une fonction polynomiale étant unique, on procédera à des identifications :

**Proposition 1 :** Une fonction polynomiale est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

$$\text{Conséquence : } \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n b_k x^k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n (a_k - b_k) x^k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0 ; n \rrbracket : a_k = b_k$$

*Conséquence : Si deux polynômes sont égaux, alors ils ont le même degré.*

**Exercice 1 :** Pour tout réel  $x$ , on a :  $ax^2 + (b - 2a)x - c = 3x^2 - 5x + 7$  Déterminer la valeur des réels  $a, b$  et  $c$ .

Correction :  $\begin{cases} a = 3 \\ b - 2a = -5 \\ -c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = -7 \end{cases}$

Remarques : Dans la suite de ce chapitre, on confondra un polynôme  $P$  ( que l'on notera  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ ) et sa fonction polynomiale  $f$  associée (notée :  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  )

On identifiera également le polynôme dérivé  $P'$  à la fonction dérivée associée  $f'$

**Tout cela est possible car les coefficients seront des réels dans tout ce chapitre**

## II) Dérivation

Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$   
On suppose que  $\deg(f) \geq 1$ .

$$\text{Alors : } f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$$

$$\deg(f') = \deg(f) - 1$$

Définition : On définit les dérivées successives de  $f$  en posant  $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f''$

et pour tout entier  $m$ ,  $f^{(m+1)} = (f^{(m)})'$  On dit que  $f^{(m)}$  est la dérivée  $m$ -ième de  $f$

Exercice 2 : 1) Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  Exprimer  $f^{(3)}(x)$

$$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

$$f''(x) = 2 * 3 * a_3x + 1 * 2 * a_2$$

$$f^{(3)}(x) = 2 * 3 * a_3 \quad \text{rappel : } n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$$

2) Pour tout réel  $x$ ,  $g(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  avec  $a_n \neq 0$ , Exprimer  $g^{(n)}(x)$ .

$$g^{(n)}(x) = n! a_n \quad (\text{fonction constante}) \text{ et } g^{(n+1)}(x) = 0$$

### III) Degré

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de degrés respectifs  $n$  et  $m$ .

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \quad Q = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_1 X + b_0$$

Quel est le degré de  $P + Q$ ? Conjecture :  $P = 3x^3 - x^2 + 1$     $Q = 5x^2 - x$    donc  $\deg(P + Q) = 3$

$$Q_1 = -3x^3 + x^2 + 3x - 1 \quad \deg(P + Q_1) = 1$$

**Proposition 2 :**  $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$

De plus, si les deux polynômes sont de degrés distincts, il y a égalité.

Démonstration :

Si  $P = Q = 0$  (donc  $\deg(P) = \deg(Q) = -\infty$ ) alors  $P + Q = 0$  et  $\deg(P + Q) = -\infty$

Sinon, on pose  $N = \max(\deg(P), \deg(Q))$

Quitte à ajouter des coefficients nuls à  $P$  ou à  $Q$ , on peut écrire  $P(X) = \sum_{k=0}^N a_k X^k$  et  $Q(X) = \sum_{k=0}^N b_k X^k$

On a alors :  $(P + Q)(X) = \sum_{k=0}^N (a_k + b_k) X^k$  donc  $\deg(P + Q) \leq N$

Si  $\deg(P) \neq \deg(Q)$  alors  $a_N$  ou  $b_N$  est non nul et  $a_N + b_N \neq 0$ . Donc :  $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$

**Proposition 3 :**  $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

(en effet, le terme dominant de  $PQ$  est  $a_n b_m X^{n+m}$  car  $a_n b_m \neq 0$ )

Exercice 3: Déterminer tous les polynômes  $P$  tels que :  $P'(X) + XP(X) = X^2 + 1$  (\*)

(indice : Montrer d'abord que si  $P$  vérifie la relation, alors  $\deg(P) = 1$ )

Correction :

$P$  ne peut clairement pas être le polynôme nul car  $X^2 + 1$  n'est pas le polynôme nul.

Si  $\deg(P) \geq 2$  alors  $\deg(P' + XP) = \deg(XP) \geq 3$ . Ce qui est impossible car  $\deg(X^2 + 1) = 2$ .

Si  $\deg(P) = 0$  alors  $\deg(P' + XP) = 1$  Ce qui est impossible car  $\deg(X^2 + 1) = 2$ .

Donc  $\deg(P) = 1$  et il existe  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $P = aX + b$

$$P' + XP = X^2 + 1 \Leftrightarrow a + (aX^2 + bX) = X^2 + 1 \Leftrightarrow aX^2 + bX + a = X^2 + 1 \Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = 0 \text{ Donc } P = X$$

Donc si  $P$  vérifie la relation (\*) alors  $P = X$  (en fait c'est le seul polynôme qui peut-être solution mais il faut encore vérifier qu'il est effectivement solution) (c'est le seul candidat possible...)

Réciproquement, il est clair que  $P = X$  vérifie la relation (\*) Conclusion  $S = \{X\}$

## IV) Division euclidienne

### 1) Définitions et propositions

Définition : On dit qu'un polynôme  $B$  divise un polynôme  $A$  s'il existe un polynôme  $Q$  tel que  $A = BQ$

(on dit aussi que  $A$  est divisible par  $B$  ou que c'est un multiple de  $B$ )

Exemple:  $X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$  donc  $X + 1$  et  $X - 2$  divisent  $X^2 - X - 2$

Théorème : Si  $A$  et  $B$  sont deux polynômes ( $B$  non nul) alors il existe un unique couple de polynômes  $(Q, R)$  tel que :

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

$Q$  et  $R$  sont respectivement appelés quotient et reste de la division euclidienne de  $A$  par  $Q$ .

### démonstration:

#### 1) Existence

Notons  $p = \deg(B) \geq 0$ ,  $B = \sum_{j=0}^p b_j X^j$  (donc  $b_p \neq 0$ ). Nous allons procéder à une récurrence sur

le degré de  $A$ . Considérons la propriété  $\mathcal{P}_n$  suivante :

Pour tout  $A$  de  $K[X]$  tel que  $\deg(A) \leq n$ , il existe  $(Q, R) \in (K[X])^2$  tel que :

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B).$$

- $\mathcal{P}_0$  est vraie. En effet, si  $A$  est une constante, il suffit de prendre :

$$\begin{cases} Q = 0 \text{ et } R = A, & \text{si } \deg(B) \geq 1 \\ Q = Ab_p^{-1} \text{ et } R = 0, & \text{si } \deg(B) = 0. \end{cases}$$

- Supposons  $\mathcal{P}_n$  vraie pour un  $n$  de  $\mathbb{N}$ , et soit  $A \in K[X]$  tel que  $\deg(A) = n + 1$ . Notons

$$A = \sum_{i=0}^{n+1} a_i X^i, \text{ et considérons :}$$

$$Q_{n+1} = a_{n+1} b_p^{-1} X^{n+1-p} \text{ et } R_{n+1} = A - BQ_{n+1}.$$

Par le choix de  $Q_{n+1}$ , les termes de degré  $n + 1$  de  $A$  et de  $BQ_{n+1}$  sont les mêmes, donc  $\deg(R_{n+1}) \leq n$ .

D'après  $\mathcal{P}_n$ , il existe  $(Q_n, R_n) \in (K[X])^2$  tel que :

$$R_{n+1} = BQ_n + R_n \text{ et } \deg(R_n) < \deg(B).$$

En notant  $Q = Q_{n+1} + Q_n$  et  $R = R_n$ , on a :

$$A = BQ_{n+1} + (BQ_n + R_n) = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B).$$

- 2) Unicité : On suppose qu'il existe deux couples de polynômes  $(Q_1, R_1)$  et  $(Q_2, R_2)$  tels que :

$$A = BQ_1 + R_1 \text{ avec } \deg(R_1) < \deg(B)$$

$$\text{et } A = BQ_2 + R_2 \text{ avec } \deg(R_2) < \deg(B)$$

On a donc l'égalité :  $BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2 \Leftrightarrow B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$  (\*)

**Si  $Q_1 \neq Q_2$**  alors  $Q_1 - Q_2 \neq 0$  et  $\deg(B(Q_1 - Q_2)) = \deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) \geq \deg(B)$

or  $\deg(R_2 - R_1) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B)$  Contradiction. Donc  $Q_1 = Q_2$

Donc, d'après (\*),  $R_1 = R_2$  L'unicité du couple  $(Q, R)$  est ainsi prouvée.

Définition : On dit que le nombre  $a$  est une racine d'un polynôme  $P$  lorsque  $P(a) = 0$

Proposition 4 : soit  $P$  un polynôme.  $a$  est une racine de  $P \Leftrightarrow (X - a)$  divise  $P$

### Démonstration :

$\Leftarrow$  Si  $(X - a)$  divise  $P$ , alors il existe un polynôme  $Q$  tel que  $P = (X - a)Q$  et on a donc  $P(a) = (a - a)Q(a) = 0$ .

$\Rightarrow$  Supposons que  $a$  soit une racine de  $P$ . Effectuons la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)$

Il existe un unique couple de polynômes  $(Q, R)$  tel que :  $P = (X - a)Q + R$  et  $\deg(R) < \deg(X - a) = 1$

Donc le polynôme  $R$  est un polynôme constant.

Or  $0 = P(a) = (a - a)Q(a) + R(a)$  donc  $R(a) = 0$  et  $R$  étant constant, on a  $R = 0$  et  $P = (X - a)Q$

Proposition 5: Soit  $n \in N^*$  et  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  racines distinctes d'un polynôme  $A$  alors  $\prod_{k=1}^n (X - a_k)$  divise  $A$ .

### Démonstration : Récurrence sur $n$ .

On note :  $\mathcal{P}(n)$  la propriété ci-dessus.

\*  $\mathcal{P}(1)$  est vraie d'après la propriété précédente.

\* On suppose  $\mathcal{P}(n)$  vraie pour un certain  $n \in N^*$  et on considère  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$  racines distinctes de  $A$ .

D'après  $\mathcal{P}(n)$ ,  $A$  se factorise déjà sous la forme  $A = \prod_{k=1}^n (X - a_k) Q$  où  $Q$  est un polynôme.

$$A(a_{n+1}) = \prod_{k=1}^n (a_{n+1} - a_k) Q(a_{n+1}) = 0 \quad (a_{n+1} \text{ est une racine})$$

Or, les racines étant distinctes :  $\prod_{k=1}^n (a_{n+1} - a_k) \neq 0$  donc  $Q(a_{n+1}) = 0$  et  $Q$  s'écrit donc sous la forme

$$Q = (X - a_{n+1})Q_1 \quad \text{donc} \quad A = \prod_{k=1}^{n+1} (X - a_k) Q_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(n+1) \text{ est donc vraie}$$

\*  $\mathcal{P}(n)$  étant vraie au rang 1 et héréditaire, on conclut qu'elle est vraie pour tout  $n \in N^*$ .

## 2) Exemples de divisions euclidiennes

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$$

On peut vérifier rapidement que  $-5$  est une racine.  $f(x)$  est donc factorisable par  $(x + 5)$

Voici 2 méthodes permettant d'effectuer la factorisation :

### \*identification des coefficients (voir proposition 1 et exemple 1)

Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x + 5)(ax^2 + bx + c)$

$$x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x + 5)(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 - x - 30 = ax^3 + bx^2 + cx + 5ax^2 + 5bx + 5c$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 - x - 30 = ax^3 + (b + 5a)x^2 + (c + 5b)x + 5c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + 5a = 6 \\ c + 5b = -1 \\ 5c = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -6 \end{cases} \quad \text{conclusion : } x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x + 5)(x^2 + x - 6)$$

**\*On peut poser une division en suivant le même genre de protocole que dans les divisions enseignées en primaire.**

-Par quoi faut-il multiplier le  $x$  de  $x + 5$  pour obtenir  $x^3$  ? par  $x^2$

Puis on multiplie  $x + 5$  par  $x^2$  et on soustrait le résultat à  $x^3 + 6x^2 - x - 30$

On obtient  $x^2$

On abaisse ensuite le  $-x$

-Par combien faut-il multiplier le  $x$  de  $x+5$  pour obtenir le  $x^2$  bleu ? par  $x$

Puis on multiplie  $x + 5$  par  $x$  et on soustrait le résultat à  $x^2 - x$

On obtient  $-6x$  et on abaisse  $-30$ .

- Par combien faut-il multiplier le  $x$  de  $x+5$  pour obtenir le  $-6x$  bleu ? par  $-6$ .

Après soustraction, on obtient un reste nul et on en conclut que

$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 - x - 30 \\ - x^3 - 5x^2 \\ \hline x^2 - x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 - x - 30 \\ x^2 - x \\ \hline x^2 + x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 - x - 30 \\ x^2 - x \\ \hline -6x - 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 6x^2 - x - 30 \\ x^2 - x \\ \hline x^2 + x - 6 \\ -6x - 30 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x + 5)(x^2 + x - 6)$$

Le trinôme  $x^2 + x - 6$  peut ensuite se factoriser facilement en déterminant ses racines.

$$\text{On obtient : } x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x + 5)(x - 2)(x + 3)$$

**Attention : Le reste d'une division n'est pas toujours nul.**

**Exercice 4 :** Effectuer la division euclidienne de  $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 12$  par  $x^2 - 1$

La division s'arrête lorsque le degré du reste est strictement inférieur à celui du diviseur.

$$\text{On obtient ainsi : } x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 12 = (x^2 - 1)(x^2 + 3x - 1) + 10x - 13$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 12 \\ \exists x^3 - x^2 \\ -x^2 + 10x \\ \hline 10x - 13 \end{array} \quad \begin{array}{c} x^2 - 1 \\ \hline x^2 + 3x - 1 \end{array}$$

**Exercice 5 :** Effectuer la division euclidienne de  $6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2x - 2$  par  $x^2 + 2$

$$\begin{array}{r} 6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2x - 2 \\ -6x^4 \\ \hline -2x^3 - 12x^2 \\ 2x^3 \\ \hline -3x^2 + 2x - 2 \\ 3x^2 \\ \hline 2x + 4 \end{array} \quad \begin{array}{c} x^2 + 2 \\ \hline 6x^2 - 2x - 3 \end{array}$$

### 3) Application : Lever une forme indéterminée dans le calcul d'une limite

**Exercice 6 :** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+x-10}{2x^2-x-6}$

C'est un cas sournois d'indétermination de type 0/0.

L'idée est de factoriser par  $(x - 2)$  le numérateur (par exemple en le divisant par  $(x - 2)$ ) et le dénominateur.

On peut ensuite procéder à une simplification et le tour est joué !

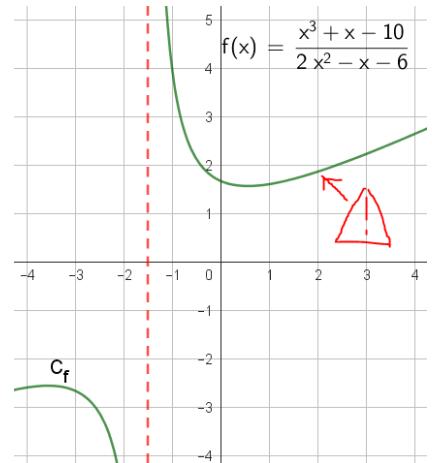
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+x-10}{2x^2-x-6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+5)}{(x-2)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x+5}{2x+3} = \frac{13}{7}$$

Attention, graphiquement, on visualise bien le fait que la fonction n'est pas définie en  $x = 2$  mais il faut garder en tête qu'elle n'est pas non plus définie en 2.

Il y a en fait un « trou » (invisible) dans le tracé de la courbe : elle est discontinue en 2.

Par contre, si on pose :  $f(2) = \frac{13}{7}$  alors elle devient continue en 2.

On dit que l'on a effectué un prolongement par continuité en 2.



**Proposition 6 :** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et A un polynôme de degré au plus  $n$ .

A est le polynôme nul  $\Leftrightarrow$  A admet au moins  $n + 1$  racines distinctes

**Conséquence : Un polynôme non nul de degré  $n \geq 1$  admet maximum  $n$  racines**

Démonstration :

$\Rightarrow$  Evident

$\Leftarrow$  Si A admet au moins  $n + 1$  racines distinctes, alors d'après la proposition précédente :

$$A = \prod_{k=1}^{n+1} (X - a_k) Q_1 \quad \text{où } Q_1 \text{ est un polynôme.}$$

Si  $Q_1 \neq 0$ , on aurait  $\deg(A) = \deg(\prod_{k=1}^{n+1} (X - a_k) Q_1) \geq n + 1$ , ce qui est impossible car  $\deg(A) \leq n$ .

Il y a une contradiction donc on en déduit que notre hypothèse est fausse

Donc  $Q_1 = 0$  et par conséquent,  $A = 0$ .

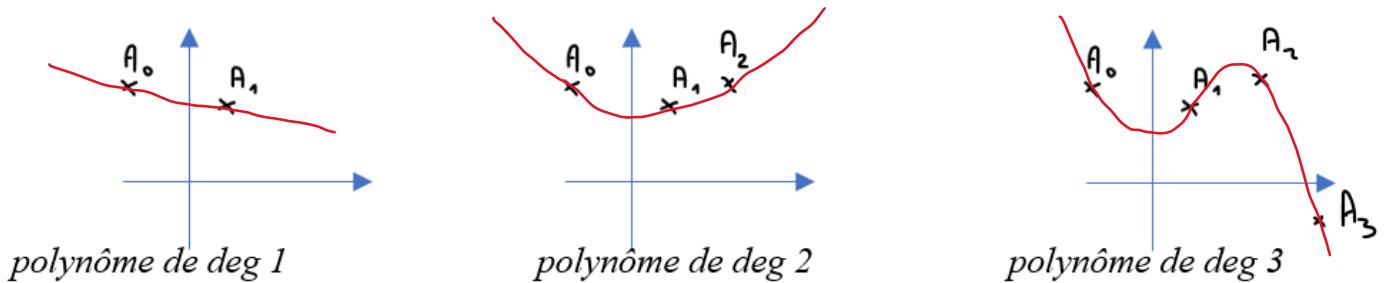
## APPLICATION : Les polynômes de LAGRANGE

Soit  $f : [a, b] \rightarrow R$  une fonction pour laquelle on connaît les images de  $n + 1$  nombres distincts  $x_0, x_1, \dots, x_n$  de l'intervalle  $[a ; b]$

**Le but est de construire une fonction polynomiale  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n$**

**dont la courbe représentative passe par les points  $A_0(x_0, f(x_0)), A_1(x_1, f(x_1)) \dots, A_n(x_n, f(x_n))$**

c'est-à-dire que :  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(x_j) = f(x_j)$



**Théorème :** Si une telle fonction  $P$  existe, alors elle est unique.

**Démonstration :** Soit  $Q$  un autre polynôme solution de notre problème.

Alors  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad Q(x_j) - P(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0$  et donc  $(Q - P)(x_j) = 0$

Donc le polynôme  $Q - P$  a  $n+1$  racines or  $\deg(Q - P) \leq n$  donc d'après la proposition précédente,  $Q - P$  est le polynôme nul. Donc  $Q = P$ .

**Théorème :** Il existe un polynôme solution de ce problème (et il est donc unique d'après le théorème précédent)

Ce polynôme s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \quad \text{où} \quad L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

Le polynôme  $P_n$  est appelé **polynôme d'interpolation de Lagrange** de la fonction  $f$  aux points  $x_0, x_1, \dots, x_n$

Les polynômes  $L_i(x)$  sont appelerés **polynômes de base de Lagrange** associés à ces points.

**Démonstration :**

**\*Existence :** Il suffit de vérifier que le polynôme proposé est bien solution du problème.

Remarquons d'abord que

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad : \quad L_i(x_j) = \prod_{k \neq i}^n \frac{(x_j - x_k)}{(x_i - x_k)} = (\prod_{k \neq i}^n (x_j - x_k)) / (\prod_{k \neq i}^n (x_i - x_k)) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

En effet :

Si  $i \neq j$  :  $k$  prend toutes les valeurs autres que  $i$ , donc il prendra la valeur  $j$  à un moment donné et le numérateur sera nul.

Si  $i = j$  : Le numérateur est égal au dénominateur....

Le polynôme  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$  convient car :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket : P_n(x_j) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x_j) = f(x_j) * L_j(x_j) = f(x_j)$$

En effet, comme indiqué ci-dessus, pour toutes les valeurs de  $i$  différentes de  $j$ ,  $L_i(x_j) = 0$ .

### Exercice 7 : Le but est de construire une fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n = 2

dont la courbe représentative passe par les 3 points  $A_0(-1; 6)$   $A_1(1; 0)$  ....  $A_2(2; 3)$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)L_i(x) = f(\textcolor{red}{x}_0)L_0(x) + f(\textcolor{blue}{x}_1)L_1(x) + f(\textcolor{orange}{x}_2)L_2(x)$$

Exprimons d'abords les polynômes de base  $L_0$  et  $L_2$

$$\text{Il est inutile de s'intéresser à } L_1 \text{ car } f(x_1) = f(1) = 0 \text{ d'après l'énoncé.} \quad L_i(x) = \prod_{k=0}^n \prod_{k \neq i} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$$

$$L_0(x) = \prod_{k=1}^2 \frac{(x-x_k)}{(x_0-x_k)} = \frac{x-\textcolor{blue}{x}_1}{x_0-\textcolor{blue}{x}_1} * \frac{x-\textcolor{orange}{x}_2}{x_0-\textcolor{orange}{x}_2} = \frac{x-1}{-2} * \frac{x-2}{-3} = \frac{1}{6} (x^2 - 3x + 2)$$

$$L_2(x) = \prod_{k=0}^1 \frac{(x-x_k)}{(\textcolor{orange}{x}_2-x_k)} = \frac{x-\textcolor{red}{x}_0}{\textcolor{orange}{x}_2-\textcolor{red}{x}_0} * \frac{x-\textcolor{blue}{x}_1}{\textcolor{orange}{x}_2-\textcolor{blue}{x}_1} = \frac{x+1}{3} * \frac{x-1}{1} = \frac{1}{3} (x^2 - 1)$$

$$P_n(x) = f(-1)L_0(x) + f(2)L_2(x) = 6 * \frac{1}{6} (x^2 - 3x + 2) + 3 * \frac{1}{3} (x^2 - 1) = \underline{\underline{2x^2 - 3x + 1}}$$

On vérifie bien sûr que les 3 images sont correctes...

Pour s'entraîner sur un autre exemple, il suffit d'écrire une fonction polynomiale de degré  $n$ , de déterminer l'image de  $n+1$  nombres et de « s'amuser » à retrouver la fonction grâce aux polynômes de Lagrange.

ATTENTION : il y a une autre méthode pour déterminer un tel polynôme :  $P(x) = ax^2 + bx + c$

a) On sait que  $P(-1) = 6$ ,  $P(1) = 0$  et  $P(2) = 3$  et on obtient donc le système suivant :  $\begin{cases} a - b + c = 6 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}$

qui s'écrit sous la forme  $AX = B$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

on résout l'équation :  $A^{-1}AX = A^{-1}B$  on a donc  $X = A^{-1}B$  et  $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Proposition 7 : Relations coefficients/racines : polynôme de degré 2

Soient S, P,  $x_1, x_2$  quatre nombres réels.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 x_2 = P \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont les racines du polynômes } X^2 - SX + P$$

Preuve :

$$\Rightarrow X^2 - SX + P = X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1 x_2 = (X-x_1)(X-x_2) \text{ donc } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont bien les racines du polynôme}$$

$$\Leftarrow x_1 = \frac{S+\sqrt{S^2-4P}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{S-\sqrt{S^2-4P}}{2} \quad \text{on a bien } x_1 + x_2 = S \text{ et } x_1 x_2 = P$$

### Exercice 8 :

1) On remarque que 2 est solution de l'équation  $x^2 - 5x + 6 = 0$ . Quelle est l'autre solution ?

2) Un rectangle peut-il avoir un périmètre de 16m et une aire de 8 m<sup>2</sup>? Si oui, donner sa longueur et sa largeur.

### Correction :

1) le produit des racines est égal à 6. Donc la deuxième racine est 3.

On aurait pu dire aussi : la somme des racines vaut  $-(-5)$  soit 5, et on retrouve 3 comme deuxième racine réelle.

2/ soit  $x_1$  la longueur et  $x_2$  la largeur du rectangle

$$\text{Périmètre} = 16 \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 = 16 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) = 16 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 8 = S \text{ et aire} = 8 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 8 = P$$

Donc  $x_1$  et  $x_2$  seraient les racines réelles de l'équation  $x^2 - 8x + 8 = 0$  (\*) d'après la proposition 6.

Le discriminant est positif, donc l'équation (\*) admet 2 racines réelles:  $x_1 = 4 + 2\sqrt{2}$  et  $x_1 = 4 - 2\sqrt{2}$

## V) Multiplicité (ou ordre) d'une racine

Définition :  $a$  est une racine de multiplicité  $m \geq 1$  si  $(X - a)^m$  divise A et que  $(X - a)^{m+1}$  ne divise pas A.

Si  $m=1$ , on parle de racine simple. Si  $m=2$ , on parle de racine double. Si  $m=3$ , on parle de racine triple.

Proposition 8 : soit  $P$  un polynôme.

$$a \text{ est une racine d'ordre } m \geq 1 \text{ de } P \Leftrightarrow P(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

Illustration :  $P(X) = X^2 - 6X + 9 \quad \Delta = 0 \quad$  donc une racine double ou de multiplicité 2 :  $x_0 = 3$

Donc  $P(X) = (X - 3)^2 \quad P'(X) = 2X - 6 \quad P''(X)=2 \quad 3$  est bien racine de  $P$  et de  $P'$  mais pas de  $P''$

### Exercice 9: multiplicité d'une racine

Soient  $a$  et  $b$  deux réels et  $P$  le polynôme tel que  $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$

1) Montrer que si le réel 1 est racine de  $P$ , son ordre de multiplicité est au moins 2.

2) Existe-t-il des réels  $a$  et  $b$  tels que le réel 1 soit racine de  $P$  d'ordre supérieur à 2 ?

Si oui, quel est alors son ordre de multiplicité ?

Correction :

1.  $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$ ,  $P'(X) = 4X^3 + 3aX^2 + 2bX + a$ .

Supposons 1 racine de  $P$  alors  $P(1) = 0$  donc  $1 + a + b + a + 1 = 0$  c'est-à-dire  $2a + b + 2 = 0$ .

On en déduit  $P'(1) = 4 + 3a + 2b + a = 4a + 2b + 4 = 2(2a + b + 2) = 0$ .

Ainsi  $P(1) = 0 \Rightarrow P'(1) = 0$ .

**Conclusion :** Si 1 est racine de  $P$  c'est une racine au moins double.

2.  $P''(X) = 12X^2 + 6aX + 2b$ .

"1 racine de  $P$  d'ordre au moins 3" équivaut à "  $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ ".

Or d'après les calculs précédents  $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b &= -2 \\ 3a + b &= -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -4 \\ b &= +6 \end{cases}$

Ainsi la réponse à la question est "oui".

Alors  $P(X) = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1 = (X - 1)^4$ .

Dans ce cas l'ordre de la racine 1 est 4.

## Exercice 10 : multiplicité d'une racine

Soit  $P$  un polynôme.

On appelle  $Q$  le polynôme défini par  $Q(X) = (X - a)(P'(X) + P'(a)) - 2(P(X) - P(a))$

Montrer que  $a$  est une racine d'ordre supérieur ou égal à 2.

Il faut montrer que  $a$  est racine de  $Q$  et de sa dérivée ( $Q(a) = Q'(a) = 0$ )

$$Q(a) = (a - a)(P'(a) + P'(a)) - 2(P(a) - P(a))$$

$$Q(a) = 0 * (P'(a) + P'(a)) - 2 * 0 = 0$$

*Attention : pour dériver  $Q$ , on pose  $U=X-a$  et  $V=P'(X)+P'(a)$  et on utilise la formule du produit.*

*De plus, attention,  $P'(a)$  et  $P(a)$  sont des constantes.*

$$Q'(X) = (P'(X) + P'(a)) + (X - a)P''(X) - 2P'(X)$$

Donc

$$Q'(a) = (P'(a) + P'(a)) + (a - a)P''(a) - 2P'(a) = 0$$

## VI) Exercices

### Exercice 11 : Les polynômes de Tchebychev

On définit une suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la manière suivante :

$$T_0(X) = 1, \quad T_1(X) = X, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

- 1) Calculer  $T_2, T_3$  et  $T_4$

On trouve successivement :

$$T_2(X) = 2XT_1(X) - T_0(X) = 2X^2 - 1.$$

$$T_3(X) = 2XT_2(X) - T_1(X) = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X.$$

$$T_4(X) = 2XT_3(X) - T_2(X) = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1.$$

- 2) Prouver par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  :  $\deg(T_n) = n$  puis déterminer le coefficient dominant de  $T_n$

Montrons par récurrence double sur  $n \in \mathbb{N}$  que  $\deg T_n = n$ .

Pour  $n = 0$  et  $n = 1$  : ok

Supposons la propriété établie aux rangs  $n \geq 0$  et  $n+1$ . Au rang  $n+2$  :

On sait  $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ .

Par hypothèse de récurrence  $\deg T_n = n$  et  $\deg T_{n+1} = n+1$  d'où  $\deg XT_{n+1} = n+2$ .

Par somme de polynômes de degré distincts :  $\deg T_{n+2} = n+2$ .

Récurrence établie.

Les coefficients dominants de  $T_0$  et  $T_1$  valent 1.

Pour  $n \geq 1$ , la relation  $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ , implique, connaissant le degré de chaque polynôme, que le coefficient dominant de  $T_{n+1}$  est le double de celui de  $T_n$ .

Par suite, pour  $n \geq 1$ , le coefficient dominant de  $T_n$  est  $2^{n-1}$ .

3) Etude de la parité

- a) Conjecturer la parité de  $T_n$  en fonction de  $n$
- b) Prouver par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$

Il suffit de prouver, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , la propriété  $\mathcal{P}(n)$  :  $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ .

Elle est vraie si  $n = 0$  (car  $T_0$  est pair) et si  $n = 1$  (car  $T_1$  est impair).

On se donne  $n \geq 0$  et on suppose que  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  sont vraies.

On en déduit :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-X) &= 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) = 2(-X)(-1)^{n+1}T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X) \\ &= (-1)^{n+2}(2XT_{n+1}(X) - T_n(X)) = (-1)^{n+2}T_{n+2}(X) \end{aligned}$$

Cela montre la propriété au rang  $n+2$  et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , le polynôme  $T_n$  a la parité de  $n$ .

4) Prouver que  $\forall n \in \mathbb{N}, T_n(1) = 1$

La relation  $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$  donne  $T_{n+2}(1) = 2T_{n+1}(1) - T_n(1)$ .

Or  $T_0(1) = T_1(1) = 1$ . Une récurrence évidente donne alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, T_n(1) = 1$ .

5) Montrer que  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \leq n \Rightarrow 2T_n T_m = T_{m+n} + T_{n-m}$

On note  $\mathcal{P}(m)$  la propriété : “ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow 2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m}$ ”.

On va montrer la propriété  $\mathcal{P}(m)$  par récurrence sur  $m \geq 0$ .

La propriété  $\mathcal{P}(0)$  est évidente (car  $T_0 = 1$ ), et la propriété  $\mathcal{P}(1)$  n'est autre que la relation connue entre les polynômes  $T_{n-1}$ ,  $T_n$  et  $T_{n+1}$  (car  $T_1 = X$ ).

On se donne  $m \geq 0$  et on suppose que  $\mathcal{P}(m)$  et  $\mathcal{P}(m+1)$  sont vraies.

On a donc les égalités  $\begin{cases} (E_0) : 2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m} \\ (E_1) : 2T_n T_{m+1} = T_{n+m+1} + T_{n-m-1} \end{cases}$  valables pour  $n \geq m+2$ .

On forme alors  $2X(E_1) - (E_0)$  et on obtient :

$2T_n(2XT_{m+1} - T_m) = (2XT_{n+m+1} - T_{n+m}) + (2XT_{n-m-1} - T_{n-m})$ , c'est-à-dire

$2T_n T_{m+2} = T_{n+m+2} + T_{n-(m+2)}$ , ce qui prouve  $\mathcal{P}(m+2)$  et achève la récurrence.

6) Montrer que  $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, T_m(T_n(X)) = T_{mn}(X)$

On note  $\mathcal{P}(m)$  la propriété :  $\forall n \in \mathbb{N}, T_m(T_n(X)) = T_{mn}(X)$ .

On va montrer la propriété  $\mathcal{P}(m)$  par récurrence sur  $m \geq 0$ .

Les propriétés  $\mathcal{P}(0)$  et  $\mathcal{P}(1)$  sont évidentes car  $T_0 = 1$  et  $T_1 = X$ .

On se donne  $m \geq 0$  et on suppose que  $\mathcal{P}(m)$  et  $\mathcal{P}(m+1)$  sont vraies.

On substitue  $T_n(X)$  à  $X$  dans l'égalité  $T_{m+2}(X) = 2XT_{m+1}(X) - T_m(X)$ .

On en déduit, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , et en utilisant  $\mathcal{P}(m)$  et  $\mathcal{P}(m+1)$  :

$$T_{m+2}(T_n(X)) = 2T_n(X)T_{m+1}(T_n(X)) - T_m(T_n(X)) = 2T_n(X)T_{(m+1)n}(X) - T_{mn}(X)$$

Mais d'après (3) on a  $2T_n T_{(m+1)n} = T_{(m+2)n} - T_{mn}$ .

On en déduit  $T_{m+2}(T_n(X)) = T_{(m+2)n}(X)$ , ce qui prouve  $\mathcal{P}(m+2)$  et achève la récurrence.

## Exercice 12 : On recherche les polynômes non nuls divisibles par leur propre dérivée

On procède en quatre étapes.

1ère étape : On montre que le problème a un sens en exhibant des exemples de solutions.

2ième étape : On suppose le problème résolu pour un polynôme non nul et on en déduit la forme nécessaire d'un tel polynôme.

3ième étape : Réciproquement on vérifie que la forme particulière trouvée est une solution.

4ième étape : On résout complètement le problème.

- 1) Vérifier que les polynômes  $P(X) = X$ ;  $P(X) = X - 1$  et  $P(X) = (X + 1)^2$  font partie des solutions
- 2) On suppose que le polynôme  $P$ , de degré  $n$ , de coefficient dominant  $a_n$ , est divisible par son polynôme  $P'$ .
  - a) Démontrer que  $n \geq 1$

Le polynôme  $P$  étant non nul, il possède un degré  $n$  tel que  $n \in N$ .

Raisonnons par l'absurde, supposons  $n = 0$ , alors  $P' = 0$  et  $P$ , non nul, ne peut pas être multiple de  $P'$ .

Conclusion :  $n \in N^*$ .

- b) Démontrer qu'il existe un réel  $\alpha$  tel que  $P(X) = \frac{1}{n} (X - \alpha)P'(X)$

### ⊖ Aide simple

Soit  $Q$  le polynôme tel que  $P = QP'$ , utiliser les degrés de  $P$  et  $P'$  puis les coefficients dominants pour trouver la forme de  $Q$ .

### ⊖ Solution détaillée

Puisque  $P'$  divise  $P$ , il existe un polynôme  $Q$  tel que  $P = QP'$ (\*)

Donc  $\deg(P) = \deg(Q) + \deg(P')$  et  $\deg(Q) = n - (n - 1) = 1$ .

Alors il existe deux réels  $a, b$  tels que  $a \neq 0$ ,  $Q(X) = aX + b$ .

Les coefficients dominants des polynômes  $P, Q, P'$  sont respectivement  $a_n, a, na_n$ .

L'égalité (\*) implique  $a_n = a \times na_n$ , d'où  $a = \frac{1}{n}$  car  $a_n \neq 0$ .

On en déduit  $Q(X) = \frac{1}{n}X + b = \frac{1}{n}(X + nb) = \frac{1}{n}(X - \alpha)$ , si on désigne par  $\alpha$  le réel  $-nb$ .

Conclusion : Il existe un réel  $\alpha$  tel que  $P(X) = \frac{1}{n}(X - \alpha)P'(X)$ .

- c) Démontrer que si  $k$  est un entier  $0 \leq k \leq n$  alors  $P^{(k)}(X) = \frac{1}{n-k} (X - \alpha)P^{(k+1)}(X)$

⊕ Aide simple

| Raisonnez par récurrence.

⊖ Solution détaillée

Raisonnons par récurrence.

Soit  $R(k)$  la relation  $P^{(k)}(X) = \frac{1}{n-k}(X - \alpha)P^{(k+1)}(X)$ .

$R(0)$  est satisfaite d'après la question b.

Supposons  $0 \leq k < n - 1$  et  $R(k)$  satisfaite, donc

$$P^{(k+1)}(X) = \left(\frac{1}{n-k}(X - \alpha)P^{(k+1)}(X)\right)^t = \frac{1}{n-k}P^{(k+1)}(X) + \frac{1}{n-k}(X - \alpha)P^{(k+2)}(X)$$

$$\text{d'où } \left(1 - \frac{1}{n-k}\right)P^{(k+1)}(X) = \frac{1}{n-k}(X - \alpha)P^{(k+2)}(X)$$

$$\text{puis } P^{(k+1)}(X) = \frac{1}{n-k-1}(X - \alpha)P^{(k+2)}(X).$$

Donc  $R(k+1)$  est satisfaite.

Ceci termine le raisonnement par récurrence.

d) Démontrer que le polynôme  $P$  vérifie l'égalité  $P(X) = a_n(X - \alpha)^n$

Solution détaillée

En appliquant le résultat précédent successivement aux entiers  $0, 1, \dots, n - 1$ , on démontre par récurrence :

$$P(X) = \frac{1}{n}(X - \alpha)P'(X) \quad P(X) = \frac{1}{n(n-1)}(X - \alpha)^2 P''(X)$$

$$\dots P(X) = \frac{1}{n(n-1)\dots 1}(X - \alpha)^n P^{(n)}(X)$$

$$\text{or } P^{(n)}(X) = n(n-1)\dots 1a_n = n!a_n.$$

$$\text{D'où } P(X) = a_n(X - \alpha)^n.$$

3) Soit  $A(X) = \delta(X - \alpha)^n$  où  $(n, \delta, \alpha) \in N^* \times R^* \times R^*$

Vérifier que le polynôme  $A$  est une solution du problème

$$A(X) = \delta(X - \alpha)^n, A'(X) = n\delta(X - \alpha)^{n-1} \text{ donc } A(X) = \frac{1}{n}(X - \alpha)A'(X).$$

Ainsi le polynôme  $A$  est divisible par son polynôme dérivé  $A'$ .

4) Décrire l'ensemble des solutions du problème.

Le polynôme nul est, de façon évidente, une solution.

D'après les questions 2. et 3., un polynôme non nul  $P$  de degré  $n$  est solution si et seulement si  $n \neq 0$  et  $P$  est de la forme  $A(X) = \delta(X - \alpha)^n$  où  $(\delta, \alpha) \in R^* \times R$ .

Donc  $S = \{\lambda(X - \alpha)^n; (n, \lambda, \alpha) \in N^* \times R^2\}$ .

Remarque : Quand le réel  $\lambda$  est nul, on obtient le polynôme nul.

## VII) EXTRAITS DU CONCOURS GENERAL

### 1) Exercice 1 du sujet 2019

La fonction  $f$  est une *fonction polynomiale* si  $f$  est nulle ou s'il existe un entier  $d \geq 0$  et des nombres réels  $a_0, a_1, \dots, a_d$  avec  $a_d \neq 0$  tels que, pour tout nombre réel  $x \geq 0$ ,

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Les nombres réels  $a_0, a_1, \dots, a_d$  sont alors appelés coefficients de la fonction polynomiale  $f$ .

Si  $\mathcal{S}$  est un ensemble de fonctions de  $\mathcal{P}$ , on définit les propriétés :

- (P1)  $\mathcal{S}$  contient  $u$  et  $v$ .
- (P2)  $\mathcal{S}$  contient toutes les fonctions constantes positives.
- (P3) Si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{S}$ , alors  $f + g$  est dans  $\mathcal{S}$ .
- (P4) Si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{S}$ , alors  $f \circ g$  est dans  $\mathcal{S}$ .
- (P5) Si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{S}$  avec  $f \geq g$ , alors  $f - g$  est dans  $\mathcal{S}$ .
- (P6) Si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{S}$ , alors  $f \times g$  est dans  $\mathcal{S}$ .

- 1) Soit  $\mathcal{T}$  un ensemble de fonctions de  $\mathcal{P}$  qui vérifie les propriétés (P1), (P2), (P3), (P4), (P5) et (P6).
  - a) Soit  $\ell$  la fonction définie, pour tout nombre réel  $x \geq 0$ , par  $\ell(x) = x$ . Démontrer que la fonction  $\ell$  est dans  $\mathcal{T}$ .
  - b) Déterminer toutes les fonctions affines qui sont dans  $\mathcal{T}$ .
  - c) Soit  $p$  la fonction polynomiale définie, pour tout nombre réel  $x \geq 0$ , par  $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ . Démontrer que la fonction  $p$  est dans  $\mathcal{T}$ .
  - d) Une fonction polynomiale de  $\mathcal{P}$  est-elle toujours dans  $\mathcal{T}$ ?
- 2) Dans cette question, on suppose que  $\mathcal{U}$  est un ensemble de fonctions de  $\mathcal{P}$  qui vérifie les propriétés (P1), (P2), (P3), (P4) et (P5), mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété (P6). La réponse donnée à la question d) est-elle encore valable?
- 3) Dans cette question, on suppose que  $\mathcal{V}$  est un ensemble de fonctions de  $\mathcal{P}$  qui vérifie les propriétés (P1), (P2), (P4), (P5) et (P6), mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété (P3).
  - a) Soit  $d$  un entier naturel non nul. On note  $Q_d$  la fonction définie, pour tout nombre réel  $x \geq 0$ , par

$$Q_d(x) = (x+1)^d - 1.$$

Montrer que  $Q_d \in \mathcal{V}$ .

- b) Soit  $d$  un entier naturel non nul. Démontrer qu'il existe des nombres entiers  $a_1, \dots, a_d$  supérieurs ou égaux à 1 tels que, pour tout nombre réel  $x \geq 0$ ,

$$(x+1)^d = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + 1.$$

Étant donné un nombre réel  $x \geq 0$ , on introduira une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres  $d$  et  $\frac{x}{1+x}$ .

- c) Soit  $f$  une fonction polynomiale telle que  $f(0) = 0$ . Montrer qu'il existe un nombre réel  $c \geq 0$  et un entier naturel non nul  $d$  tels que la fonction qui, à tout nombre réel  $x \geq 0$ , associe

$$c(x + x^2 + \dots + x^d) - f(x)$$

est une fonction polynomiale dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

- d) En déduire que, si  $f$  est une fonction polynomiale de  $\mathcal{P}$  telle que  $f(0) = 0$ , alors  $f$  est dans  $\mathcal{V}$ .

## CORRECTION

Dans ce problème, il est question de déterminer quels sont les ensembles  $E$  de fonctions définies sur  $[0 ; +\infty[$  et prenant leurs valeurs dans  $[0 ; +\infty[$  qui satisfont une liste de cinq ou six propriétés.

- La propriété (P3) est la stabilité pour l'addition (la somme de deux fonctions de  $E$  appartient à  $E$ ).
- La propriété (P4) est la stabilité pour la composition (la composée de deux fonctions de  $E$  appartient à  $E$ ).
- La propriété (P6) est la stabilité pour la multiplication (le produit de deux fonctions de  $E$  appartient à  $E$ ).

Les propriétés (P1) et (P2) introduisent quelques « briques » élémentaires permettant de bâtir l'édifice  $E$  en question. Mais lequel ? C'est ce que nous allons voir.

1.a. D'après la propriété (P1), les fonctions  $u$  et  $v$  appartiennent à  $T$ . D'après la propriété (P4), leur composée  $v \circ u$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :  $v \circ u(x) = \ln((e^x - 1) + 1) = \ln(e^x) = x$  appartient à  $T$ .

La fonction identique  $id_{[0; +\infty[}$  notée  $l$  dans ce problème :  $x \mapsto l(x) = x$  appartient à  $T$ .

1.b. La fonction identique appartient à  $T$  et, d'après la propriété (P2),  $T$  contient les constantes positives. D'après la propriété (P6), l'ensemble  $T$  contient le produit de la fonction  $l$  par toute constante positive : Toutes les fonctions linéaires  $x \mapsto ax$  où  $a$  est un coefficient positif appartiennent à  $T$ .

D'après la propriété (P3), toute somme d'une fonction linéaire de coefficient positif et d'une constante positive appartient à  $T$  : toutes les fonctions affines  $x \mapsto ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives appartiennent à  $T$ .

Soit réciproquement  $x \mapsto f(x) = ax + b$  une fonction affine.

- Si  $a < 0$ , l'image par  $f$  de l'intervalle  $\left[\frac{b}{a}, +\infty\right[$  est incluse dans  $]-\infty, 0]$ .  $f$  n'est pas à valeurs dans  $[0, +\infty[$ , cette fonction n'appartient pas à  $T$ .
- Si  $a = 0$  et  $b < 0$ , l'image par  $f$  de  $[0, +\infty[$  est un réel négatif,  $f$  n'est pas à valeurs dans  $[0, +\infty[$ , cette fonction n'appartient pas à  $T$ .

- Si  $a > 0$  et  $b < 0$ , l'image de l'intervalle  $\left[0, \frac{b}{a}\right]$  est incluse dans  $]-\infty, 0]$ ,  $f$  n'est pas à valeurs dans  $[0, +\infty[$ , cette fonction n'appartient pas à  $\mathbf{T}$ .

Par conséquent, les fonctions affines  $x \mapsto ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes positives appartiennent à  $\mathbf{T}$ , et ce sont les seules fonctions affines qui appartiennent à  $\mathbf{T}$ . Notons qu'il s'agit là des fonctions polynomiales du premier degré définies sur  $[0 ; +\infty[$  et à valeurs dans  $[0 ; +\infty[$ .

**1.c.** En vertu de la propriété (P6), dès lors que la fonction identique appartient à  $\mathbf{T}$ , toutes les fonctions puissances  $x \mapsto x^n$  appartiennent à  $\mathbf{T}$  (elles sont produit  $n$  fois de la fonction identique) ainsi que toutes les fonctions monômes :  $x \mapsto a_n x^n$  où  $a_n$  est un coefficient positif.

En vertu de la propriété (P3), toute fonction polynomiale  $x \mapsto a_d x^d + \dots + a_0$  où tous les  $a_i$  sont des coefficients positifs appartient à  $\mathbf{T}$  (elles sont sommes de monômes).

Il en est ainsi de la fonction polynomiale :  $x \mapsto 2x^2 + 4$ .

Quant à la fonction  $x \mapsto 3x$ , en tant que fonction linéaire à coefficient positif, elle appartient à  $\mathbf{T}$ .

Pour tout  $x$  positif :  $p(x) = (2x^2 + 4) - 3x = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} \geq 0$  : la différence entre la fonction  $x \mapsto 2x^2 + 4$  et la fonction  $x \mapsto 3x$  est une fonction positive sur  $[0, +\infty[$ . En vertu de la propriété (P5), cette différence appartient à  $\mathbf{T}$ . La fonction  $x \mapsto p(x) = 2x^2 - 3x + 4$  appartient à  $\mathbf{T}$ .

**1.d.** Soit  $f$  une fonction polynomiale  $x \mapsto f(x) = a_d x^d + \dots + a_0$  avec  $a_d \neq 0$  définie sur  $[0, +\infty[$  et à valeurs dans  $[0, +\infty[$ . Avoir des valeurs dans  $[0, +\infty[$  signifie admettre un minimum  $m$  positif sur  $[0, +\infty[$ .

Deux conditions au moins sont nécessaires pour cela :

- $a_d > 0$  (si  $a_d < 0$ ,  $f$  admet pour limite  $-\infty$  en  $+\infty$ , elle n'est pas à valeurs dans  $[0, +\infty[$ ).
- $a_0 \geq 0$  (si  $a_0 < 0$ ,  $f(0) < 0$ ,  $f$  n'est pas non plus à valeurs dans  $[0, +\infty[$ ).

Soit  $U$  la partie de l'ensemble des coefficients  $\{a_d, \dots, a_0\}$  contenant les coefficients positifs ou nuls. Cette partie n'est pas vide, car elle contient au moins  $a_d$  et  $a_0$ . Soit  $V$  la partie (éventuellement vide) de l'ensemble  $\{a_d, \dots, a_0\}$  contenant les coefficients strictement négatifs.

Si  $V$  est vide,  $f$  appartient à  $\mathbf{T}$  comme on l'a noté dans 1.c.

Sinon, posons :  $g(x) = \sum_{a_i \in U} a_i x^i$  et  $h(x) = \sum_{a_i \in V} -a_i x^i$ . Ces deux fonctions polynomiales sont à coefficients positifs, elles appartiennent toutes les deux à  $\mathbf{T}$ .

Pour tout  $x$  de  $[0, +\infty[$  :  $g(x) - h(x) = f(x) \geq m \geq 0$ . La différence  $g - h$  est une fonction positive sur  $[0, +\infty[$ . En vertu de (P5), cette différence appartient à  $\mathbf{T}$ . Toute fonction polynomiale définie sur  $[0, +\infty[$  et à valeurs dans  $[0, +\infty[$  appartient à  $\mathbf{T}$ .

## Exercice 1 du sujet 2018 : Les polynômes de Bernstein

### Partie A : Les polynômes de Bernstein

Pour tout entier naturel  $n$  et pour tout entier naturel  $i$  compris entre 0 et  $n$ , on note  $B_{n,i}$  le polynôme défini pour  $p$  variant dans l'intervalle  $[0; 1]$  par

$$B_{n,i}(p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

avec  $\binom{n}{i}$  le coefficient binomial,  $i$  parmi  $n$ . Ainsi  $B_{0,0}(p) = 1$ ;  $B_{1,0}(p) = 1 - p$  et  $B_{1,1}(p) = p$ .

Ces polynômes sont appelés **polynômes de Bernstein**.

- 1° (a) Donner l'expression de  $B_{2,0}(p)$ ,  $B_{2,1}(p)$  et  $B_{2,2}(p)$ .  
(b) Déterminer l'expression des polynômes de Bernstein pour  $n = 3$ , à savoir  $B_{3,0}(p)$ ,  $B_{3,1}(p)$ ,  $B_{3,2}(p)$  et  $B_{3,3}(p)$ .
- 2° (a) Quelle est l'expression de  $B_{n,0}(p)$  et de  $B_{n,n}(p)$ ?  
(b) Démontrer que pour tout  $n \geq 1$  et pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n - 1$ ,

$$B_{n,i}(p) = (1-p)B_{n-1,i}(p) + pB_{n-1,i-1}(p).$$

- 3° (a) En quelle(s) valeur(s)  $p \in [0; 1]$  s'annule un polynôme de Bernstein?  
*On raisonnera en distinguant les cas selon les valeurs de  $n$  et de  $i$ .*  
(b) Qu'en est-il de son signe sur  $[0; 1]$ ?

- 4° Démontrer que les polynômes de Bernstein d'un même degré  $n$  forment une partition de l'unité : c'est-à-dire, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\sum_{i=0}^n B_{n,i}(p) = B_{n,0}(p) + B_{n,1}(p) + \dots + B_{n,n-1}(p) + B_{n,n}(p) = 1.$$

- 5° Déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{i=0}^n i B_{n,i}(p) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^n i^2 B_{n,i}(p).$$

Que représentent ces sommes en termes probabilistes ?

### CORRECTION

Lien vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=coGd2ykgYfg>