

Polynômes

I) Définitions

Définition telle qu'elle est donnée dans un sujet du concours général :

La fonction f est une fonction polynomiale :

* si f est nulle

* ou s'il existe un entier $n \geq 0$ et des nombres réels a_0, a_1, \dots, a_n avec $a_n \neq 0$ tels que,

$$\text{pour tout nombre réel } x, f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Les nombres a_0, a_1, \dots, a_n sont alors appelés coefficients de la fonction polynomiale f .

L'entier n est appelé le degré du polynôme et le coefficient a_n est appelé le coefficient dominant.

Le degré d'un polynôme constant non nul est donc égal à 0 et, par convention, le degré du polynôme nul est égal à $-\infty$

Remarque importante : L'écriture d'une fonction polynomiale étant unique, on procédera à des identifications :

Proposition 1 : Une fonction polynomiale est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

$$\text{Conséquence : } \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n b_k x^k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n (a_k - b_k) x^k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket : a_k = b_k$$

Conséquence : Si deux polynômes sont égaux, alors ils ont le même degré.

Exercice 1 : Pour tout réel x , on a : $ax^2 + (b - 2a)x - c = 3x^2 - 5x + 7$ Déterminer la valeur des réels a, b et c .

$$\text{Correction : } \begin{cases} a = 3 \\ b - 2a = -5 \\ -c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = -7 \end{cases}$$

Remarques : Dans la suite de ce chapitre, on confondra un polynôme P (que l'on notera $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$)
et sa fonction polynomiale f associée (notée : $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$)

On identifiera également le polynôme dérivé P' à la fonction dérivée associée f'

Tout cela est possible car les coefficients seront des réels dans tout ce chapitre

II) Dérivation

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$
On suppose que $\deg(f) \geq 1$.

$$\text{Alors : } f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$$

$$\deg(f') = \deg(f) - 1$$

Définition : On définit les dérivées successives de f en posant $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f''$

et pour tout entier $m, f^{(m+1)} = (f^{(m)})'$ On dit que $f^{(m)}$ est la dérivée m -ième de f

Exercice 2 : 1) Pour tout réel x , $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ Exprimer. $f^{(3)}(x)$

$$f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x^1 + a_1$$

$$f''(x) = 2 * 3 * a_3x + 1 * 2 * a_2$$

$$f^{(3)}(x) = 2 * 3 * a_3 \quad \text{rappel : } n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$$

2) Pour tout réel x , $g(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$, Exprimer $g^{(n)}(x)$.

$$g^{(n)}(x) = n! a_n \quad (\text{fonction constante}) \quad \text{et} \quad g^{(n+1)}(x) = 0$$

III) Degré

Soient P et Q deux polynômes de degrés respectifs n et m .

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \quad Q = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \dots + b_1 X + b_0$$

Quel est le degré de $P + Q$? Conjecture : $P = 3x^3 - x^2 + 1$ $Q = 5x^2 - x$ donc $\deg(P + Q) = 3$

$$Q_1 = -3x^3 + x^2 + 3x - 1 \quad \deg(P + Q_1) = 1$$

Proposition 2 : $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P); \deg(Q))$

De plus, si les deux polynômes sont de degrés distincts, il y a égalité.

Démonstration :

Si $P = Q = 0$ (donc $\deg(P) = \deg(Q) = -\infty$) alors $P + Q = 0$ et $\deg(P + Q) = -\infty$

Sinon, on pose $N = \max(\deg(P), \deg(Q))$

Quitte à ajouter des coefficients nuls à P ou à Q, on peut écrire $P(X) = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^N b_k X^k$

On a alors : $(P + Q)(X) = \sum_{k=0}^N (a_k + b_k) X^k$ donc $\deg(P + Q) \leq N$

Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors a_N ou b_N est non nul et $a_N + b_N \neq 0$. Donc : $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$

Proposition 3 : $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

(en effet, le terme dominant de PQ est $a_n b_m X^{n+m}$ car $a_n b_m \neq 0$)

Exercice 3 : Déterminer tous les polynômes P tels que : $P'(X) + X P(X) = X^2 + 1$ (*)

(indice : Montrer d'abord que si P vérifie la relation, alors $\deg(P) = 1$)

Correction :

P ne peut clairement pas être le polynôme nul car $X^2 + 1$ n'est pas le polynôme nul.

Si $\deg(P) \geq 2$ alors $\deg(P' + XP) = \deg(XP) \geq 3$. Ce qui est impossible car $\deg(X^2 + 1) = 2$.

Si $\deg(P) = 0$ alors $\deg(P' + XP) = 1$ Ce qui est impossible car $\deg(X^2 + 1) = 2$.

Donc $\deg(P) = 1$ et il existe $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = aX + b$

$$P' + XP = X^2 + 1 \Leftrightarrow a + (aX^2 + bX) = X^2 + 1 \Leftrightarrow aX^2 + bX + a = X^2 + 1 \Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = 0 \text{ Donc } P = X$$

Donc si P vérifie la relation (*) alors $P = X$ (en fait c'est le seul polynôme qui peut-être solution mais il faut encore vérifier qu'il est effectivement solution) (c'est le seul candidat possible...)

Réciproquement, il est clair que $P = X$ vérifie la relation (*) Conclusion $S = \{X\}$

IV) Division euclidienne

1) Définitions et propositions

Définition : On dit qu'un polynôme B divise un polynôme A s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$

(on dit aussi que A est divisible par B ou que c 'est un multiple de B)

Exemple: $X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ donc $X + 1$ et $X - 2$ divisent $X^2 - X - 2$

Théorème : Si A et B sont deux polynômes (B non nul) alors il existe un unique couple de polynôme (Q, R) tel que :

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

Q et R sont respectivement appelés quotient et reste de la division euclidienne de A par B .

démonstration:

1) Existence

Notons $p = \deg(B) \geq 0$, $B = \sum_{j=0}^p b_j X^j$ (donc $b_p \neq 0$). Nous allons procéder à une récurrence sur

le degré de A . Considérons la propriété \mathcal{P}_n suivante :

Pour tout A de $K[X]$ tel que $\deg(A) \leq n$, il existe $(Q, R) \in (K[X])^2$ tel que :

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B).$$

• \mathcal{P}_0 est vraie. En effet, si A est une constante, il suffit de prendre :

$$\begin{cases} Q = 0 \text{ et } R = A, & \text{si } \deg(B) \geq 1 \\ Q = Ab_p^{-1} \text{ et } R = 0, & \text{si } \deg(B) = 0. \end{cases}$$

• Supposons \mathcal{P}_n vraie pour un n de \mathbb{N} , et soit $A \in K[X]$ tel que $\deg(A) = n + 1$. Notons

$A = \sum_{i=0}^{n+1} a_i X^i$, et considérons :

$$Q_{n+1} = a_{n+1} b_p^{-1} X^{n+1-p} \text{ et } R_{n+1} = A - BQ_{n+1}.$$

Par le choix de Q_{n+1} , les termes de degré $n + 1$ de A et de BQ_{n+1} sont les mêmes, donc $\deg(R_{n+1}) \leq n$.

D'après \mathcal{P}_n , il existe $(Q_n, R_n) \in (K[X])^2$ tel que :

$$R_{n+1} = BQ_n + R_n \text{ et } \deg(R_n) < \deg(B).$$

En notant $Q = Q_{n+1} + Q_n$ et $R = R_n$, on a :

$$A = BQ_{n+1} + (BQ_n + R_n) = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B).$$

2) **Unicité :** On suppose qu'il existe deux couples de polynômes (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) tels que :

$$A = BQ_1 + R_1 \text{ avec } \deg(R_1) < \deg(B)$$

$$\text{et } A = BQ_2 + R_2 \text{ avec } \deg(R_2) < \deg(B)$$

$$\text{On a donc l'égalité : } BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2 \Leftrightarrow B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1 (*)$$

Si $Q_1 \neq Q_2$ alors $Q_1 - Q_2 \neq 0$ et $\deg(B(Q_1 - Q_2)) = \deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) \geq \deg(B)$

or $\deg(R_2 - R_1) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B)$ Contradiction. Donc $Q_1 = Q_2$

Donc, d'après (*), $R_1 = R_2$ L'unicité du couple (Q, R) est ainsi prouvée.

Définition : On dit que le nombre a est une racine d'un polynôme P lorsque $P(a) = 0$

Proposition 4 : soit P un polynôme. a est une racine de $P \Leftrightarrow (X - a)$ divise P

Démonstration :

\Leftarrow Si $(X - a)$ divise P , alors il existe un polynôme Q tel que $P = (X - a)Q$ et on a donc $P(a) = (a - a)Q(a) = 0$.

\Rightarrow Supposons que a soit une racine de P . effectuons la division euclidienne de P par $(X - a)$

Il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que : $P = (X - a)Q + R$ et $\deg(R) < \deg(X - a) = 1$

Donc le polynôme R est un polynôme constant.

Or $0 = P(a) = (a - a)Q(a) + R(a)$ donc $R(a) = 0$ et R étant constant, on a $R = 0$ et $P = (X - a)Q$

Proposition 5: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2, \dots, a_n n racines distinctes d'un polynôme A alors $\prod_{k=1}^n (X - a_k)$ divise A .

Démonstration : Récurrence sur n .

On note : $\mathcal{P}(n)$ la propriété ci-dessus.

* $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la propriété précédente.

* On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ racines distinctes de A .

D'après $\mathcal{P}(n)$, A se factorise déjà sous la forme $A = \prod_{k=1}^n (X - a_k) Q$ où Q est un polynôme.

$$A(a_{n+1}) = \prod_{k=1}^n (a_{n+1} - a_k) Q(a_{n+1}) = 0 \quad (a_{n+1} \text{ est une racine})$$

Or, les racines étant distinctes : $\prod_{k=1}^n (a_{n+1} - a_k) \neq 0$ donc $Q(a_{n+1}) = 0$ et Q s'écrit donc sous la forme

$$Q = (X - a_{n+1})Q_1 \quad \text{donc} \quad A = \prod_{k=1}^{n+1} (X - a_k)Q_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(n+1) \text{ est donc vraie}$$

* $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 1 et héréditaire, on conclut qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Exemples de divisions euclidiennes

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$$

On peut vérifier rapidement que -5 est une racine. $f(x)$ est donc factorisable par $(x + 5)$

Voici 2 méthodes permettant d'effectuer la factorisation :

***identification des coefficients (voir proposition 1 et exemple 1)**

Déterminer les réels a, b et c tels que $x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x + 5)(ax^2 + bx + c)$

$$x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x + 5)(ax^2 + bx + c) \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 - x - 30 = ax^3 + bx^2 + cx + 5ax^2 + 5bx + 5c$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 - x - 30 = ax^3 + (b + 5a)x^2 + (c + 5b)x + 5c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + 5a = 6 \\ c + 5b = -1 \\ 5c = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -6 \end{cases} \quad \text{conclusion : } x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x + 5)(x^2 + x - 6)$$

***On peut poser une division en suivant le même genre de protocole que dans les divisions enseignées en primaire.**

-Par quoi faut-il multiplier le x de $x + 5$ pour obtenir x^3 ? par x^2

Puis on multiplie $x + 5$ par x^2 et on soustrait le résultat à $x^3 + 6x^2 - x - 30$

On obtient x^2

On abaisse ensuite le $-x$

-Par combien faut-il multiplier le x de $x+5$ pour obtenir le x^2 bleu ? par x

Puis on multiplie $x + 5$ par x et on soustrait le résultat à $x^2 - x$

On obtient $-6x$ et on abaisse -30 .

- Par combien faut-il multiplier le x de $x+5$ pour obtenir le $-6x$ bleu ? par -6 .

Après soustraction, on obtient un reste nul et on en conclut que

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 6x^2 - x - 30 & x + 5 \\
 \underline{-x^3 - 5x^2} & \\
 x^2 - x - 30 & \\
 \underline{x^2 + 5x} & \\
 -6x - 30 & \\
 \underline{6x + 30} & \\
 0 &
 \end{array}$$

$$x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x + 5)(x^2 + x - 6)$$

Le trinôme $x^2 + x - 6$ peut ensuite se factoriser facilement en déterminant ses racines.

$$\text{On obtient : } x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x + 5)(x - 2)(x + 3)$$

Attention : Le reste d'une division n'est pas toujours nul.

Exercice 4 : Effectuer la division euclidienne de $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 12$ par $x^2 - 1$

La division s'arrête lorsque le degré du reste est strictement inférieur à celui du diviseur.

$$\text{On obtient ainsi : } x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 12 = (x^2 - 1)(x^2 + 3x - 1) + 10x - 13$$

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 12 & x^2 - 1 \\
 \underline{-(x^4 - x^2)} & \\
 3x^3 - x^2 + 7x - 12 & \\
 \underline{-(3x^3 - 3x)} & \\
 -x^2 + 10x - 12 & \\
 \underline{-(x^2 - 1)} & \\
 10x - 13 &
 \end{array}$$

Exercice 5 : Effectuer la division euclidienne de $6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2x - 2$ par $x^2 + 2$

$$\begin{array}{r|l}
 6x^4 & -2x^3 & +9x^2 & -2x & -2 & \\
 \underline{-6x^4} & & -12x^2 & & & \\
 & -2x^3 & -3x^2 & -2x & -2 & \\
 & \underline{2x^3} & & +4x & & \\
 & & -3x^2 & +2x & -2 & \\
 & & \underline{3x^2} & & +6 & \\
 & & & 2x & +4 &
 \end{array}$$

3) Application : Lever une forme indéterminée dans le calcul d'une limite

Exercice 6 : Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x - 10}{2x^2 - x - 6}$

C'est un cas sournois d'indétermination de type 0/0.

L'idée est de factoriser par $(x - 2)$ le numérateur (par exemple en le divisant par $(x - 2)$) et le dénominateur.

On peut ensuite procéder à une simplification et le tour est joué !

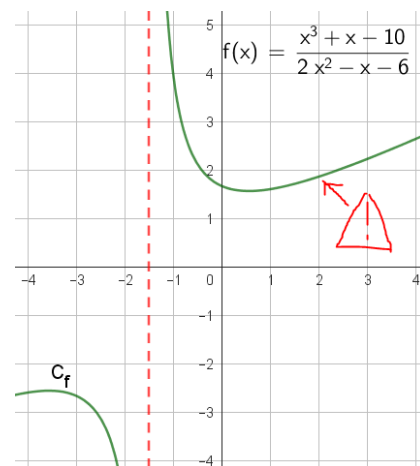
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x - 10}{2x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 5)}{(x - 2)(2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 5}{2x + 3} = \frac{13}{7}$$

Attention , graphiquement, on visualise bien le fait que la fonction n'est pas définie en $-\frac{3}{2}$ mais il faut garder en tête qu'elle n'est pas non plus définie en 2.

Il y a en fait un « trou » (invisible) dans le tracé de la courbe : elle est discontinue en 2.

Par contre , si on pose : $f(2) = \frac{13}{7}$ alors elle devient continue en 2.

On dit que l'on a effectué un prolongement par continuité en 2.



Proposition 6 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et A un polynôme de degré au plus n .

A est le polynôme nul $\Leftrightarrow A$ admet au moins $n + 1$ racines distinctes

Conséquence : Un polynôme non nul de degré $n \geq 1$ admet maximum n racines

Démonstration :

\Rightarrow Evident

\Leftarrow Si A admet au moins $n + 1$ racines distinctes, alors d'après la proposition précédente :

$$A = \prod_{k=1}^{n+1} (X - a_k) Q_1 \quad \text{où } Q_1 \text{ est un polynôme.}$$

Si $Q_1 \neq 0$, on aurait $\deg(A) = \deg(\prod_{k=1}^{n+1} (X - a_k) Q_1) \geq n + 1$, ce qui est impossible car $\deg(A) \leq n$.

Il y a une contradiction donc on en déduit que notre hypothèse est fausse

Donc $Q_1 = 0$ et par conséquent, $A = 0$.

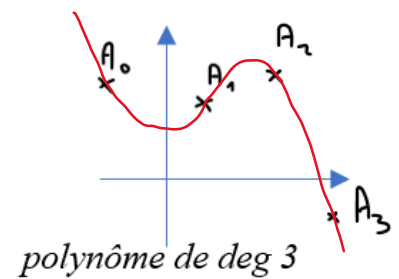
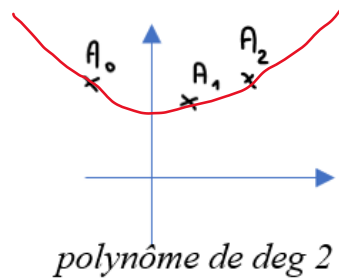
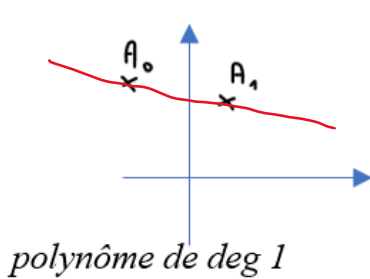
APPLICATION : Les polynômes de LAGRANGE

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction pour laquelle on connaît les images de $n + 1$ nombres distincts x_0, x_1, \dots, x_n de l'intervalle $[a; b]$

Le but est de construire une fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n

dont la courbe représentative passe par les points $A_0(x_0, f(x_0))$, $A_1(x_1, f(x_1))$ $A_n(x_n, f(x_n))$

c'est-à-dire que : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(x_j) = f(x_j)$



Théorème : Si une telle fonction P existe, alors elle est unique.

Démonstration : Soit Q un autre polynôme solution de notre problème.

Alors $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad Q(x_j) - P(x_j) = f(x_j) - f(x_j) = 0$ et donc $(Q - P)(x_j) = 0$

Donc le polynôme $Q-P$ a $n+1$ racines or $\deg(Q-P) \leq n$ donc d'après la proposition précédente, $Q-P$ est le polynôme nul. Donc $Q=P$.

Théorème : Il existe un polynôme solution de ce problème (et il est donc unique d'après le théorème précédent)

Ce polynôme s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \quad \text{où} \quad L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

Le polynôme P_n est appelé **polynôme d'interpolation de Lagrange** de la fonction f aux points x_0, x_1, \dots, x_n

Les polynômes $L_i(x)$ sont appelés **polynômes de base de Lagrange** associés à ces points.

Démonstration :

***Existence :** Il suffit de vérifier que le polynôme proposé est bien solution du problème.

Remarquons d'abord que

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad : \quad L_i(x_j) = \prod_{k \neq i}^n \frac{(x_j - x_k)}{(x_i - x_k)} = \left(\prod_{k \neq i}^n (x_j - x_k) \right) / \left(\prod_{k \neq i}^n (x_i - x_k) \right) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

En effet :

Si $i \neq j$: k prend toutes les valeurs autres que i , donc il prendra la valeur j à un moment donné et le numérateur sera nul.

Si $i = j$: Le numérateur est égal au dénominateur....

Le polynôme $P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$ convient car :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket : P_n(x_j) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x_j) = f(x_j) * L_j(x_j) = f(x_j)$$

En effet, comme indiqué ci-dessus, pour toutes les valeurs de i différentes de j , $L_i(x_j) = 0$.

Exercice 7 : Le but est de construire une fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à $n = 2$
dont la courbe représentative passe par les 3 points $A_0(-1; 6)$ $A_1(1; 0)$ $A_2(2; 3)$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)L_i(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

Exprimons d'abord les polynômes de base L_0 et L_2

Il est inutile de s'intéresser à L_1 car $f(x_1) = f(1) = 0$ d'après l'énoncé. $L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$

$$L_0(x) = \prod_{k=1}^2 \frac{(x-x_k)}{(x_0-x_k)} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} * \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-1}{-2} * \frac{x-2}{-3} = \frac{1}{6} (x^2 - 3x + 2)$$

$$L_2(x) = \prod_{k=0}^1 \frac{(x-x_k)}{(x_2-x_k)} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} * \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x+1}{3} * \frac{x-1}{1} = \frac{1}{3} (x^2 - 1)$$

$$P_n(x) = f(-1)L_0(x) + f(2)L_2(x) = 6 * \frac{1}{6} (x^2 - 3x + 2) + 3 * \frac{1}{3} (x^2 - 1) = \underline{2x^2 - 3x + 1}$$

On vérifie bien sûr que les 3 images sont correctes...

Pour s'entraîner sur un autre exemple, il suffit d'écrire une fonction polynomiale de degré n , de déterminer l'image de $n+1$ nombres et de « s'amuser » à retrouver la fonction grâce aux polynômes de Lagrange.

ATTENTION : il y a une autre méthode pour déterminer un tel polynôme : $P(x) = ax^2 + bx + c$

a) On sait que $P(-1) = 6$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 3$ et on obtient donc le système suivant :
$$\begin{cases} a - b + c = 6 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}$$

qui s'écrit sous la forme $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

on résout l'équation : $A^{-1}AX = A^{-1}B$ on a donc $X = A^{-1}B$ et $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Proposition 7 : Relations coefficients/racines : polynôme de degré 2

Soient S, P, x_1, x_2 quatre nombres réels.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 x_2 = P \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont les racines du polynôme } X^2 - SX + P$$

Preuve :

$\Rightarrow X^2 - SX + P = X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1 x_2 = (X - x_1)(X - x_2)$ donc x_1 et x_2 sont bien les racines du polynôme

$\Leftarrow x_1 = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$ et $x_2 = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$ on a bien $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 x_2 = P$

Exercice 8 :

1) On remarque que 2 est solution de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$. Quelle est l'autre solution ?

2) Un rectangle peut-il avoir un périmètre de 16m et une aire de 8 m² ? Si oui, donner sa longueur et sa largeur.

Correction :

1) le produit des racines est égal à 6. Donc la deuxième racine est 3.

On aurait pu dire aussi : la somme des racines vaut $-(-5)$ soit 5, et on retrouve 3 comme deuxième racine réelle.

2/ soit x_1 la longueur et x_2 la largeur du rectangle

$$\text{Périmètre} = 16 \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 = 16 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) = 16 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 8 = S \text{ et aire} = 8 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 8 = P$$

Donc x_1 et x_2 seraient les racines réelles de l'équation $x^2 - 8x + 8 = 0$ (*) d'après la proposition 6.

Le discriminant est positif, donc l'équation (*) admet 2 racines réelles: $x_1 = 4 + 2\sqrt{2}$ et $x_2 = 4 - 2\sqrt{2}$

V) Multiplicité (ou ordre) d'une racine

Définition : a est une racine de multiplicité $m \geq 1$ si $(X - a)^m$ divise A et que $(X - a)^{m+1}$ ne divise pas A .

Si $m=1$, on parle de racine simple. Si $m=2$, on parle de racine double. Si $m=3$, on parle de racine triple.

Proposition 8 : soit P un polynôme.

$$a \text{ est une racine d'ordre } m \geq 1 \text{ de } P \Leftrightarrow P(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

Illustration : $P(X) = X^2 - 6X + 9$ $\Delta = 0$ donc une racine double ou de multiplicité 2 : $x_0 = 3$

Donc $P(X) = (X - 3)^2$ $P'(X) = 2X - 6$ $P''(X) = 2$ 3 est bien racine de P et de P' mais pas de P''

Exercice 9: multiplicité d'une racine

Soient a et b deux réels et P le polynôme tel que $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$

- 1) Montrer que si le réel 1 est racine de P , son ordre de multiplicité est au moins 2.
- 2) Existe-t-il des réels a et b tels que le réel 1 soit racine de P d'ordre supérieur à 2 ?
Si oui, quel est alors son ordre de multiplicité ?

Correction :

$$1. \quad P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1, \quad P'(X) = 4X^3 + 3aX^2 + 2bX + a.$$

Supposons 1 racine de P alors $P(1) = 0$ donc $1 + a + b + a + 1 = 0$ c'est-à-dire $2a + b + 2 = 0$.

On en déduit $P'(1) = 4 + 3a + 2b + a = 4a + 2b + 4 = 2(2a + b + 2) = 0$.

Ainsi $P(1) = 0 \Rightarrow P'(1) = 0$.

Conclusion : Si 1 est racine de P c'est une racine au moins double.

$$2. \quad P''(X) = 12X^2 + 6aX + 2b.$$

"1 racine de P d'ordre au moins 3" équivaut à " $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ ".

$$\text{Or d'après les calculs précédents } P(1) = P'(1) = P''(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -2 \\ 3a + b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = +6 \end{cases}$$

Ainsi la réponse à la question est "oui".

$$\text{Alors } P(X) = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1 = (X - 1)^4.$$

Dans ce cas l'ordre de la racine 1 est 4.

Exercice 10 : multiplicité d'une racine

Soit P un polynôme.

On appelle Q le polynôme défini par $Q(X) = (X - a)(P'(X) + P'(a)) - 2(P(X) - P(a))$

Montrer que a est une racine d'ordre supérieur ou égal à 2.

Il faut montrer que a est racine de Q et de sa dérivée ($Q(a) = Q'(a) = 0$)

$$Q(a) = (a - a)(P'(a) + P'(a)) - 2(P(a) - P(a))$$

$$Q(a) = 0 * (P'(a) + P'(a)) - 2 * 0 = 0$$

Attention : pour dériver Q , on pose $U = X - a$ et $V = P'(X) + P'(a)$ et on utilise la formule du produit.

De plus, attention, $P'(a)$ et $P(a)$ sont des constantes.

$$Q'(X) = (P'(X) + P'(a)) + (X - a)P''(X) - 2P'(X)$$

Donc

$$Q'(a) = (P'(a) + P'(a)) + (a - a)P''(a) - 2P'(a) = 0$$

VI) Exercices

Exercice 11 : Les polynômes de Tchebychev

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$T_0(X) = 1, \quad T_1(X) = X, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

- 1) Calculer T_2, T_3 et T_4

On trouve successivement :

$$T_2(X) = 2XT_1(X) - T_0(X) = 2X^2 - 1.$$

$$T_3(X) = 2XT_2(X) - T_1(X) = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X.$$

$$T_4(X) = 2XT_3(X) - T_2(X) = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1.$$

- 2) Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n : $\deg(T_n) = n$ puis déterminer le coefficient dominant de T_n

Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $\deg T_n = n$.

Pour $n = 0$ et $n = 1$: ok

Supposons la propriété établie aux rangs $n \geq 0$ et $n + 1$. Au rang $n + 2$:

On sait $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Par hypothèse de récurrence $\deg T_n = n$ et $\deg T_{n+1} = n + 1$ d'où $\deg XT_{n+1} = n + 2$.

Par somme de polynômes de degré distincts : $\deg T_{n+2} = n + 2$.

Récurrence établie.

Les coefficients dominants de T_0 et T_1 valent 1.

Pour $n \geq 1$, la relation $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$, implique, connaissant le degré de chaque polynôme, que le coefficient dominant de T_{n+1} est le double de celui de T_n .

Par suite, pour $n \geq 1$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} .

3) Etude de la parité

a) Conjecturer la parité de T_n en fonction de n

b) Prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$

Il suffit de prouver, pour tout n de \mathbb{N} , la propriété $\mathcal{P}(n) : T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.

Elle est vraie si $n = 0$ (car T_0 est pair) et si $n = 1$ (car T_1 est impair).

On se donne $n \geq 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

On en déduit :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(-X) &= 2(-X)T_{n+1}(-X) - T_n(-X) = 2(-X)(-1)^{n+1}T_{n+1}(X) - (-1)^n T_n(X) \\ &= (-1)^{n+2}(2X T_{n+1}(X) - T_n(X)) = (-1)^{n+2}T_{n+2}(X) \end{aligned}$$

Cela montre la propriété au rang $n+2$ et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout n de \mathbb{N} , le polynôme T_n a la parité de n .

4) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N} \quad T_n(1) = 1$

La relation $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$ donne $T_{n+2}(1) = 2T_{n+1}(1) - T_n(1)$.

Or $T_0(1) = T_1(1) = 1$. Une récurrence évidente donne alors : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n(1) = 1$.

5) Montrer que $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \leq n \Rightarrow 2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m}$

On note $\mathcal{P}(m)$ la propriété : " $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq m \Rightarrow 2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m}$ ".

On va montrer la propriété $\mathcal{P}(m)$ par récurrence sur $m \geq 0$.

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est évidente (car $T_0 = 1$), et la propriété $\mathcal{P}(1)$ n'est autre que la relation connue entre les polynômes T_{n-1} , T_n et T_{n+1} (car $T_1 = X$).

On se donne $m \geq 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$ sont vraies.

On a donc les égalités $\begin{cases} (E_0) : 2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m} \\ (E_1) : 2T_n T_{m+1} = T_{n+m+1} + T_{n-m-1} \end{cases}$ valables pour $n \geq m+2$.

On forme alors $2X(E_1) - (E_0)$ et on obtient :

$$2T_n(2X T_{m+1} - T_m) = (2X T_{n+m+1} - T_{n+m}) + (2X T_{n-m-1} - T_{n-m}), \text{ c'est-à-dire}$$

$$2T_n T_{m+2} = T_{n+m+2} + T_{n-(m+2)}, \text{ ce qui prouve } \mathcal{P}(m+2) \text{ et achève la récurrence.}$$

6) Montrer que $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, T_m(T_n(X)) = T_{mn}(X)$

On note $\mathcal{P}(m)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, T_m(T_n(X)) = T_{mn}(X)$.

On va montrer la propriété $\mathcal{P}(m)$ par récurrence sur $m \geq 0$.

Les propriétés $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont évidentes car $T_0 = 1$ et $T_1 = X$.

On se donne $m \geq 0$ et on suppose que $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$ sont vraies.

On substitue $T_n(X)$ à X dans l'égalité $T_{m+2}(X) = 2X T_{m+1}(X) - T_m(X)$.

On en déduit, pour tout n de \mathbb{N} , et en utilisant $\mathcal{P}(m)$ et $\mathcal{P}(m+1)$:

$$T_{m+2}(T_n(X)) = 2T_n(X) T_{m+1}(T_n(X)) - T_m(T_n(X)) = 2T_n(X) T_{(m+1)n}(X) - T_{mn}(X)$$

$$\text{Mais d'après (3) on a } 2T_n T_{(m+1)n} = T_{(m+2)n} - T_{mn}.$$

On en déduit $T_{m+2}(T_n(X)) = T_{(m+2)n}(X)$, ce qui prouve $\mathcal{P}(m+2)$ et achève la récurrence.

Exercice 12 : On recherche les polynômes non nuls divisibles par leur propre dérivée

On procède en quatre étapes.

1ère étape : On montre que le problème a un sens en exhibant des exemples de solutions.

2ième étape : On suppose le problème résolu pour un polynôme non nul et on en déduit la forme nécessaire d'un tel polynôme.

3ième étape : Réciproquement on vérifie que la forme particulière trouvée est une solution.

4ième étape : On résout complètement le problème.

- 1) Vérifier que les polynômes $P(X) = X$; $P(X) = X - 1$ et $P(X) = (X + 1)^2$ font partie des solutions
- 2) On suppose que le polynôme P , de degré n , de coefficient dominant a_n , est divisible par son polynôme P' .
 - a) Démontrer que $n \geq 1$

Le polynôme P étant non nul, il possède un degré n tel que $n \in \mathbb{N}$.

Raisonnons par l'absurde, supposons $n = 0$, alors $P' = 0$ et P , non nul, ne peut pas être multiple de P' .

Conclusion : $n \in \mathbb{N}^*$.

- b) Démontrer qu'il existe un réel α tel que $P(X) = \frac{1}{n} (X - \alpha)P'(X)$

⊖ Aide simple

| Soit Q le polynôme tel que $P = QP'$, utiliser les degrés de P et P' puis les coefficients dominants pour trouver la forme de Q .

⊖ Solution détaillée

Puisque P' divise P , il existe un polynôme Q tel que $P = QP'$ (*).

Donc $\deg(P) = \deg(Q) + \deg(P')$ et $\deg(Q) = n - (n - 1) = 1$.

Alors il existe deux réels a, b tels que $a \neq 0$, $Q(X) = aX + b$.

Les coefficients dominants des polynômes P, Q, P' sont respectivement a_n, a, na_n .

L'égalité (*) implique $a_n = a \times na_n$, d'où $a = \frac{1}{n}$ car $a_n \neq 0$.

On en déduit $Q(X) = \frac{1}{n}X + b = \frac{1}{n}(X + nb) = \frac{1}{n}(X - \alpha)$, si on désigne par α le réel $-nb$.

Conclusion : Il existe un réel α tel que $P(X) = \frac{1}{n}(X - \alpha)P'(X)$.

- c) Démontrer que si k est un entier $0 \leq k \leq n$ alors $P^{(k)}(X) = \frac{1}{n-k} (X - \alpha)P^{(k+1)}(X)$

⊖ Aide simple

| Raisonner par récurrence.

⊖ Solution détaillée

Raisonnons par récurrence.

Soit $R(k)$ la relation $P^{(k)}(X) = \frac{1}{n-k}(X-\alpha)P^{(k+1)}(X)$.

$R(0)$ est satisfaite d'après la question b.

Supposons $0 \leq k < n-1$ et $R(k)$ satisfaite, donc

$$P^{(k+1)}(X) = \left(\frac{1}{n-k}(X-\alpha)P^{(k+1)}(X)\right)' = \frac{1}{n-k}P^{(k+1)}(X) + \frac{1}{n-k}(X-\alpha)P^{(k+2)}(X)$$

$$\text{d'où } \left(1 - \frac{1}{n-k}\right)P^{(k+1)}(X) = \frac{1}{n-k}(X-\alpha)P^{(k+2)}(X)$$

$$\text{puis } P^{(k+1)}(X) = \frac{1}{n-k-1}(X-\alpha)P^{(k+2)}(X).$$

Donc $R(k+1)$ est satisfaite.

Ceci termine le raisonnement par récurrence.

d) Démontrer que le polynôme P vérifie l'égalité $P(X) = a_n(X-\alpha)^n$

Solution détaillée

En appliquant le résultat précédent successivement aux entiers $0, 1, \dots, n-1$, on démontre par récurrence :

$$P(X) = \frac{1}{n}(X-\alpha)P'(X) \quad P(X) = \frac{1}{n(n-1)}(X-\alpha)^2P''(X)$$

$$\dots P(X) = \frac{1}{n(n-1)\dots 1}(X-\alpha)^nP^{(n)}(X)$$

$$\text{or } P^{(n)}(X) = n(n-1)\dots 1a_n = n!a_n.$$

$$\text{D'où } P(X) = a_n(X-\alpha)^n.$$

3) Soit $A(X) = \delta(X-\alpha)^n$ où $(n, \delta, \alpha) \in N^* \times R^* \times R^*$
Vérifier que le polynôme A est une solution du problème

$$A(X) = \delta(X-\alpha)^n, \quad A'(X) = n\delta(X-\alpha)^{n-1} \quad \text{donc } A(X) = \frac{1}{n}(X-\alpha)A'(X).$$

Ainsi le polynôme A est divisible par son polynôme dérivé A' .

4) Décrire l'ensemble des solutions du problème.

Le polynôme nul est, de façon évidente, une solution.

D'après les questions 2. et 3., un polynôme non nul P de degré n est solution si et seulement si $n \neq 0$ et P est de la forme $A(X) = \delta(X-\alpha)^n$ où $(\delta, \alpha) \in R^* \times R$.

$$\text{Donc } S = \{\lambda(X-\alpha)^n; (n, \lambda, \alpha) \in N^* \times R^2\}.$$

Remarque : Quand le réel λ est nul, on obtient le polynôme nul.

VII) EXTRAITS DU CONCOURS GENERAL

1) Exercice 1 du sujet 2019

La fonction f est une *fonction polynomiale* si f est nulle ou s'il existe un entier $d \geq 0$ et des nombres réels a_0, a_1, \dots, a_d avec $a_d \neq 0$ tels que, pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Les nombres réels a_0, a_1, \dots, a_d sont alors appelés coefficients de la fonction polynomiale f .

Si \mathcal{S} est un ensemble de fonctions de \mathcal{P} , on définit les propriétés :

- (P1) \mathcal{S} contient u et v .
- (P2) \mathcal{S} contient toutes les fonctions constantes positives.
- (P3) Si f et g sont dans \mathcal{S} , alors $f + g$ est dans \mathcal{S} .
- (P4) Si f et g sont dans \mathcal{S} , alors $f \circ g$ est dans \mathcal{S} .
- (P5) Si f et g sont dans \mathcal{S} avec $f \geq g$, alors $f - g$ est dans \mathcal{S} .
- (P6) Si f et g sont dans \mathcal{S} , alors $f \times g$ est dans \mathcal{S} .

- 1) Soit \mathcal{T} un ensemble de fonctions de \mathcal{P} qui vérifie les propriétés (P1), (P2), (P3), (P4), (P5) et (P6).
 - a) Soit ℓ la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geq 0$, par $\ell(x) = x$. Démontrer que la fonction ℓ est dans \mathcal{T} .
 - b) Déterminer toutes les fonctions affines qui sont dans \mathcal{T} .
 - c) Soit p la fonction polynomiale définie, pour tout nombre réel $x \geq 0$, par $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Démontrer que la fonction p est dans \mathcal{T} .
 - d) Une fonction polynomiale de \mathcal{P} est-elle toujours dans \mathcal{T} ?
- 2) Dans cette question, on suppose que \mathcal{U} est un ensemble de fonctions de \mathcal{P} qui vérifie les propriétés (P1), (P2), (P3), (P4) et (P5), mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété (P6). La réponse donnée à la question d) est-elle encore valable ?
- 3) Dans cette question, on suppose que \mathcal{V} est un ensemble de fonctions de \mathcal{P} qui vérifie les propriétés (P1), (P2), (P4), (P5) et (P6), mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété (P3).
 - a) Soit d un entier naturel non nul. On note Q_d la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geq 0$, par

$$Q_d(x) = (x+1)^d - 1.$$

Montrer que $Q_d \in \mathcal{V}$.

- b) Soit d un entier naturel non nul. Démontrer qu'il existe des nombres entiers a_1, \dots, a_d supérieurs ou égaux à 1 tels que, pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$(x+1)^d = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + 1.$$

Étant donné un nombre réel $x \geq 0$, on introduira une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres d et $\frac{x}{1+x}$.

- c) Soit f une fonction polynomiale telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \geq 0$ et un entier naturel non nul d tels que la fonction qui, à tout nombre réel $x \geq 0$, associe

$$c(x + x^2 + \dots + x^d) - f(x)$$

est une fonction polynomiale dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

- d) En déduire que, si f est une fonction polynomiale de \mathcal{P} telle que $f(0) = 0$, alors f est dans \mathcal{V} .

CORRECTION

Dans ce problème, il est question de déterminer quels sont les ensembles E de fonctions définies sur $[0; +\infty[$ et prenant leurs valeurs dans $[0; +\infty[$ qui satisfont une liste de cinq ou six propriétés.

- La propriété (P3) est la stabilité pour l'addition (la somme de deux fonctions de E appartient à E).
- La propriété (P4) est la stabilité pour la composition (la composée de deux fonctions de E appartient à E).
- La propriété (P6) est la stabilité pour la multiplication (le produit de deux fonctions de E appartient à E).

Les propriétés (P1) et (P2) introduisent quelques « briques » élémentaires permettant de bâtir l'édifice E en question. Mais lequel ? C'est ce que nous allons voir.

1.a. D'après la propriété (P1), les fonctions u et v appartiennent à T . D'après la propriété (P4), leur composée $v \circ u$ définie sur $[0; +\infty[$ par : $v \circ u(x) = \ln((e^x - 1) + 1) = \ln(e^x) = x$ appartient à T .

La fonction identique $id_{[0; +\infty[}$ notée l dans ce problème : $x \mapsto l(x) = x$ appartient à T .

1.b. La fonction identique appartient à T et, d'après la propriété (P2), T contient les constantes positives. D'après la propriété (P6), l'ensemble T contient le produit de la fonction l par toute constante positive : Toutes les fonctions linéaires $x \mapsto ax$ où a est un coefficient positif appartiennent à T .

D'après la propriété (P3), toute somme d'une fonction linéaire de coefficient positif et d'une constante positive appartient à T : toutes les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ où a et b sont des constantes positives appartiennent à T .

Soit réciproquement $x \mapsto f(x) = ax + b$ une fonction affine.

- Si $a < 0$, l'image par f de l'intervalle $\left] \frac{b}{a}, +\infty \right[$ est incluse dans $] -\infty, 0[$. f n'est pas à valeurs dans $[0, +\infty[$, cette fonction n'appartient pas à T .
- Si $a = 0$ et $b < 0$, l'image par f de $[0, +\infty[$ est un réel négatif, f n'est pas à valeurs dans $[0, +\infty[$, cette fonction n'appartient pas à T .

- Si $a > 0$ et $b < 0$, l'image de l'intervalle $\left[0, \frac{b}{a}\right]$ est incluse dans $] -\infty, 0[$, f n'est pas à valeurs dans $[0, +\infty[$, cette fonction n'appartient pas à \mathbf{T} .

Par conséquent, les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ où a et b sont des constantes positives appartiennent à \mathbf{T} , et ce sont les seules fonctions affines qui appartiennent à \mathbf{T} . Notons qu'il s'agit là des fonctions polynomiales du premier degré définies sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$.

1.c. En vertu de la propriété (P6), dès lors que la fonction identique appartient à \mathbf{T} , toutes les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ appartiennent à \mathbf{T} (elles sont produit n fois de la fonction identique) ainsi que toutes les fonctions monômes : $x \mapsto a_n x^n$ où a_n est un coefficient positif.

En vertu de la propriété (P3), toute fonction polynomiale $x \mapsto a_d x^d + \dots + a_0$ où tous les a_i sont des coefficients positifs appartient à \mathbf{T} (elles sont sommes de monômes).

Il en est ainsi de la fonction polynomiale : $x \mapsto 2x^2 + 4$.

Quant à la fonction $x \mapsto 3x$, en tant que fonction linéaire à coefficient positif, elle appartient à \mathbf{T} .

Pour tout x positif : $p(x) = (2x^2 + 4) - 3x = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} \geq 0$: la différence entre la fonction $x \mapsto 2x^2 + 4$ et la fonction $x \mapsto 3x$ est une fonction positive sur $[0, +\infty[$. En vertu de la propriété (P5), cette différence appartient à \mathbf{T} . La fonction $x \mapsto p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ appartient à \mathbf{T} .

1.d. Soit f une fonction polynomiale $x \mapsto f(x) = a_d x^d + \dots + a_0$ avec $a_d \neq 0$ définie sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$. Avoir des valeurs dans $[0, +\infty[$ signifie admettre un minimum m positif sur $[0, +\infty[$.

Deux conditions au moins sont nécessaires pour cela :

- $a_d > 0$ (si $a_d < 0$, f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$, elle n'est pas à valeurs dans $[0, +\infty[$).
- $a_0 \geq 0$ (si $a_0 < 0$, $f(0) < 0$, f n'est pas non plus à valeurs dans $[0, +\infty[$).

Soit U la partie de l'ensemble des coefficients $\{a_d, \dots, a_0\}$ contenant les coefficients positifs ou nuls. Cette partie n'est pas vide, car elle contient au moins a_d et a_0 . Soit V la partie (éventuellement vide) de l'ensemble $\{a_d, \dots, a_0\}$ contenant les coefficients strictement négatifs.

Si V est vide, f appartient à \mathbf{T} comme on l'a noté dans 1.c.

Sinon, posons : $g(x) = \sum_{a_i \in U} a_i x^i$ et $h(x) = \sum_{a_i \in V} -a_i x^i$. Ces deux fonctions polynomiales sont à coefficients positifs, elles appartiennent toutes les deux à \mathbf{T} .

Pour tout x de $[0, +\infty[$: $g(x) - h(x) = f(x) \geq m \geq 0$. la différence $g - h$ est une fonction positive sur $[0, +\infty[$. En vertu de (P5), cette différence appartient à \mathbf{T} . Toute fonction polynomiale définie sur $[0, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$ appartient à \mathbf{T} .

Partie A : Les polynômes de Bernstein

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel i compris entre 0 et n , on note $B_{n,i}$ le polynôme défini pour p variant dans l'intervalle $[0; 1]$ par

$$B_{n,i}(p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

avec $\binom{n}{i}$ le coefficient binomial, i parmi n . Ainsi $B_{0,0}(p) = 1$; $B_{1,0}(p) = 1 - p$ et $B_{1,1}(p) = p$.

Ces polynômes sont appelés *polynômes de Bernstein*.

- 1° (a) Donner l'expression de $B_{2,0}(p)$, $B_{2,1}(p)$ et $B_{2,2}(p)$.
 (b) Déterminer l'expression des polynômes de Bernstein pour $n = 3$, à savoir $B_{3,0}(p)$, $B_{3,1}(p)$, $B_{3,2}(p)$ et $B_{3,3}(p)$.
 2° (a) Quelle est l'expression de $B_{n,0}(p)$ et de $B_{n,n}(p)$?
 (b) Démontrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout i compris entre 1 et $n-1$,

$$B_{n,i}(p) = (1-p)B_{n-1,i}(p) + pB_{n-1,i-1}(p).$$

- 3° (a) En quelle(s) valeur(s) $p \in [0; 1]$ s'annule un polynôme de Bernstein?
On raisonnera en distinguant les cas selon les valeurs de n et de i .
 (b) Qu'en est-il de son signe sur $[0; 1]$?
 4° Démontrer que les polynômes de Bernstein d'un même degré n forment une partition de l'unité : c'est-à-dire, pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{i=0}^n B_{n,i}(p) = B_{n,0}(p) + B_{n,1}(p) + \dots + B_{n,n-1}(p) + B_{n,n}(p) = 1.$$

5° Déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{i=0}^n i B_{n,i}(p) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^n i^2 B_{n,i}(p).$$

Que représentent ces sommes en termes probabilistes?

CORRECTION

Lien vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=coGd2ykgYfg>