Polynômes

I) Définitions

Définition telle qu'elle est donnée dans un sujet du concours général :

La fonction f est une ***fonction polynomiale*** *:*

* si f est nulle

* ou s'il existe un entier $n \geq 0$ et des nombres réels $a_0 , a_1, \dots , a_n$ avec $\boldsymbol{a_n \neq 0}$ tels que,

pour tout nombre réel x, $\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}$

Les nombres $a_0 , a_1, \dots , a_n$ sont alors appelés **coefficients** de la fonction polynômiale f.

L'entier n est appelé **le degré du polynôme** et le coefficient a_n est appelé le **coefficient dominant.**

Le degré d'un polynôme constant non nul est donc égal à 0 et, par convention, le degré du polynôme nul est égal à $-\infty$

Remarque importante : L'écriture d'une fonction polynomiale étant unique, on procédera à des identifications :

Proposition 1 : Une fonction polynômiale est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Conséquence : $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) x^k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![0 ; n]\!] : a_k = b_k$

Conséquence : Si deux polynômes sont égaux, alors ils ont le même degré.

Exercice 1 : Pour tout réel x, on a : $ax^2 + (b - 2a)x - c = 3x^2 - 5x + 7$ Déterminer la valeur des réels a, b et c.

Correction :

Remarques : Dans la suite de ce chapitre, on confondra un polynôme P (que l'on notera $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$)
et sa fonction polynomiale f associée (notée : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$)

On identifiera également le polynôme dérivé P' à la fonction dérivée associée f'

Tout cela est possible car les coefficients seront des réels dans tout ce chapitre

II) Dérivation

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

On suppose que $\deg(f) \geq 1$.

Alors : $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1 = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$

$deg\ (f\ ') =$

Définition : On définit les dérivées successives de f en posant $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$

et pour tout entier m, $f^{(m+1)} = \left(f^{(m)}\right)'$ On dit que $f^{(m)}$ est la dérivée m-ième de f

Exercice 2 : 1) Pour tout réel $x, f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ Exprimer. $f^{(3)}(x)$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f^{(3)}(x) =$$

2) Pour tout réel x, $g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$, Exprimer $g^{(n)}(x)$.

$$g^{(n)}(x) =$$

III) Degré

Soient P et Q deux polynômes de degrés respectifs n et m.

$\boldsymbol{P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0}$ $\boldsymbol{Q = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1X + b_0}$

Quel est le degré de $P + Q$ **?**

Conjecture :

Proposition 2 : $\deg(P + Q) \leq$

De plus,

Démonstration :

Si P = Q = 0 (donc $\deg(P) = \deg(Q) = -\infty$) alors P + Q = 0 et $\deg(P + Q) = -\infty$

Sinon, on pose $N = Max(\deg(P), \deg(Q))$

Quitte à ajouter des coefficients nuls à P ou à Q, on peut écrire P(X) = $\sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ et Q(X) = $\sum_{k=0}^{N} b_k X^k$

On a alors : $(P + Q)(X) = \sum_{k=0}^{N}(a_k + b_k)X^k$ donc $\deg(P + Q) \leq N$

Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors a_N ou b_N est non nul et $a_N + b_N \neq 0$. Donc : $\deg(P + Q) = Max(\deg(P), \deg(Q))$

Proposition 3 : $\deg(PQ) =$

(en effet , le terme dominant de PQ est $a_nb_mX^{n+m}$ car $a_nb_m \neq 0$)

Exercice 3: Déterminer tous les polynômes P tels que : $P'(X) + X\,P(X) = X^2 + 1$ (*)

(indice : Montrer d'abord que si P vérifie la relation, alors $\deg(P) = 1$*)*

IV) Division euclidienne

1) Définitions et propositions

Définition : On dit qu'un polynôme B divise un polynôme A s'il existe un polynôme Q tel que A = BQ

(on dit aussi que A est divisible par B ou que c'est un multiple de B)

Exemple: $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ donc $X+1$ et $X-2$ divisent $X^2 - X - 2$

Théorème : Si A et B sont deux polynômes (B non nul) alors il existe un unique couple de polynôme (Q,R) tel que :

$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B)$$

Q et R sont respectivement appelés quotient et reste de la division euclidienne de A par Q.

démonstration:

1) **Existence**

Notons $p = \deg(B) \geqslant 0$, $B = \sum_{j=0}^{p} b_j X^j$ (donc $b_p \neq 0$). Nous allons procéder à une récurrence sur le degré de A. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante :

Pour tout A de $K[X]$ tel que $\deg(A) \leqslant n$, il existe $(Q,R) \in (K[X])^2$ tel que :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

• $\mathcal{P}_0$ est vraie. En effet, si A est une constante, il suffit de prendre :

$$\begin{cases} Q = 0 \text{ et } R = A, & \text{si } \deg(B) \geqslant 1 \\ Q = Ab_p^{-1} \text{ et } R = 0, & \text{si } \deg(B) = 0. \end{cases}$$

• Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un n de $\mathbb{N}$, et soit $A \in K[X]$ tel que $\deg(A) = n+1$. Notons $A = \sum_{i=0}^{n+1} a_i X^i$, et considérons :

$$Q_{n+1} = a_{n+1} b_p^{-1} X^{n+1-p} \quad \text{et} \quad R_{n+1} = A - BQ_{n+1}.$$

Par le choix de Q_{n+1}, les termes de degré $n+1$ de A et de BQ_{n+1} sont les mêmes, donc $\deg(R_{n+1}) \leqslant n$.

D'après $\mathcal{P}_n$, il existe $(Q_n, R_n) \in (K[X])^2$ tel que :

$$R_{n+1} = BQ_n + R_n \quad \text{et} \quad \deg(R_n) < \deg(B).$$

En notant $Q = Q_{n+1} + Q_n$ et $R = R_n$, on a :

$$A = BQ_{n+1} + (BQ_n + R_n) = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

2) **Unicité :**

Définition : On dit que le nombre a est une racine d'un polynôme P lorsque $P(a) = 0$

Proposition 2 : soit P un polynôme. a est une racine de P ⇔ (X – a) divise P

Démonstration :

<= Si $(X - a)$ divise P , alors il existe…

=> Supposons que a soit une racine de P. Effectuons la division euclidienne de P par $(X - a)$

Il existe un unique couple de polynômes (Q, R)tel que :

Proposition 3: Soit $n \in N^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ n racines distinctes d'un polynôme A alors $\prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$ divise A.

Démonstration : Récurrence sur n.

On note : $\mathcal{P}(n)$ la propriété ci-dessus.

* $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la propriété précédente.

*On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in N^*$ et on considère $n + 1$ racines distinctes de A : $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$

D'après $\mathcal{P}(n)$, A se factorise déjà sous la forme $A = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)\ Q$ où Q est un polynôme.

A( ) = $\prod_{k=1}^{n}($ $-a_k)$ Q( ) =

Or, les racines étant distinctes :$\prod_{k=1}^{n}(a_{n+1} - a_k) \neq 0$ donc $Q(a_{n+1}) = 0$ et Q s'écrit donc sous la forme

Q = (X- $a_{n+1})Q_1$ donc A = $\prod_{k=1}^{n+1}(X - a_k)Q_1$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie

* $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 1 et héréditaire, on conclut qu'elle est vraie pour tout $n \in N^*$ d'après le principe de récurrence.

2) Exemples de divisions euclidiennes

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$$

On peut vérifier rapidement que -5 est une racine. $f(x)$ est donc factorisable par $(x + 5)$

Voici 2 méthodes permettant d'effectuer la factorisation :

identification des coefficients (voir proposition 1 et exemple 1)

Déterminer les réels $a, b\ et\ c$ tels que $x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x + 5)(ax^2 + bx + c)$

***On peut poser une division en suivant le même genre de protocole que dans les divisons enseignées en primaire.**

-Par quoi faut-il multiplier le x de $x + 5$ pour obtenir x^3 ? par x^2

Puis on multiplie $x + 5$ par x^2 et on soustrait le résultat à $x^3 + 6x^2 - x - 30$

$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2-x-30 & x+5 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

On obtient -x

On abaisse ensuite le -x

$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2-x-30 & x+5 \\ \cline{2-2} x^2-x & x^2 \end{array}$$

-Par combien faut-il multiplier le x de x+5 pour obtenir le x^2 bleu ? par x

Puis on multiplie $x + 5$ par x et on soustrait le résultat à x^2-x

On obtient -6x et on abaisse -30.

$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2-x-30 & x+5 \\ \cline{2-2} x^2-x & x^2+x \\ -6x-30 & \end{array}$$

- Par combien faut-il multiplier le x de x+5 pour obtenir le -6x bleu ? par -6.

Après soustraction, on obtient un reste nul et on en conclut que

$$\begin{array}{r|l} x^3+6x^2-x-30 & x+5 \\ \cline{2-2} x^2-x & x^2+x-6 \\ -6x-30 & \\ 0 & \end{array}$$

$$x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x + 5)(x^2 + x - 6)$$

Le trinôme $x^2 + x - 6$ peut ensuite se factoriser facilement en déterminant ses racines.

On obtient : $\boldsymbol{x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x + 5)(x - 2)(x + 3)}$

Attention : Le reste d'une division n'est pas toujours nul.

<u>Exercice 4 :</u> Effectuer la division euclidienne de $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 12$ par $x^2 - 1$

La division s'arrête lorsque le degré du reste est strictement inférieur à celui du diviseur.

$$\begin{array}{r|l} x^4+3x^3-2x^2+7x-12 & x^2-1 \\ \cline{2-2} & \\ & \end{array}$$

Ainsi **: $\boldsymbol{x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 12 =}$**

<u>Exercice 5 :</u> Effectuer la division euclidienne de $6x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 2x - 2$ par $x^2 + 2$

3) Application : Lever une forme indéterminée dans le calcul d'une limite

<u>Exercice 6 :</u> Déterminer $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3+x-10}{2x^2-x-6}$

C’est un cas sournois d’indétermination de type 0/0.

L’idée est de factoriser par $(x-2)$ le numérateur (par exemple en le divisant par $(x-2)$) et le dénominateur.

On peut ensuite procéder à une simplification et le tour est joué !

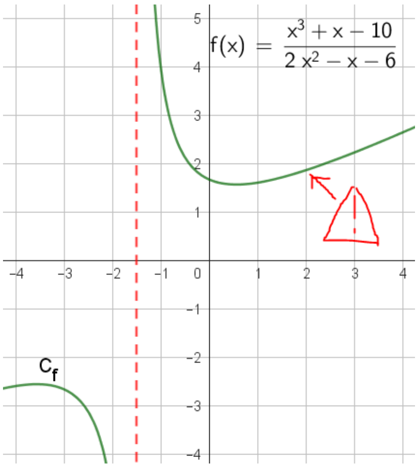
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x-10}{2x^2-x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+5)}{(x-2)(2x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+5}{2x+3}=\frac{13}{7}$$

Attention , graphiquement, on visualise bien le fait que la fonction n’est pas définie en $-\frac{3}{2}$ mais il faut garder en tête qu’elle n’est pas non plus définie en 2.

Il y a en fait un « trou » (invisible) dans le tracé de la courbe : elle est discontinue en 2.

Par contre , si on pose : $f(2)=\frac{13}{7}$ alors elle devient continue en 2.

On dit que l’on a effectué un prolongement par continuité en 2.



Proposition 4 : Soit $n \in N$ et A un polynôme de degré au plus n.

A est le polynôme nul ⇔ A admet au moins $n+1$ racines distinctes

Démonstration :

=>Evident

<= Si A admet au moins $n+1$ racines distinctes, alors d’après la proposition précédente :

A = $\prod_{k=1}^{n+1}(X-a_k)Q_1$ où Q_1 est un polynôme.

Si $Q_1 \neq 0$, on aurait $\deg(A) \geq n+1$, ce qui est impossible car $\deg(A) \leq n$.

Donc Q_1 = 0 et A = 0.

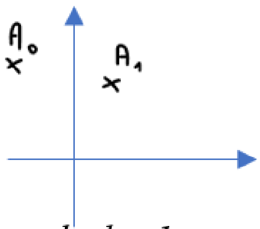
APPLICATION : Les polynômes de LAGRANGE

Soit $f : [a, b] \to R$ une fonction pour laquelle on connaît les images de $n + 1$ nombres distincts $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[a\,;b]$

Le but est de construire une <u>fonction polynomiale</u> P de degré inférieur ou égal à n

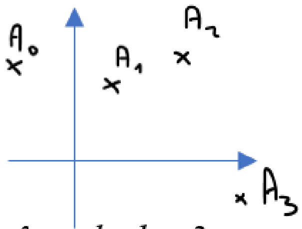
dont la courbe représentative passe par les points $A_0(x_0\,, f(x_0))$, $A_1(x_1\,, f(x_1))$ …. $A_n(x_n\,, f(x_n))$

c'est-à-dire que : $\forall\, j \in [\![0, n]\!] \quad P(x_j) = f(x_j)$



polynôme de deg 1

polynôme de deg 2



polynôme de deg 3

Théorème : Si une telle fonction P existe, alors elle est unique.

<u>Démonstration :</u>

Théorème : Il existe un polynôme solution de ce problème. Et il est donc unique d'après le théorème précédent.

Ce polynôme s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \quad \text{où} \quad L_i(x) = \prod_{k=0\ k\neq i}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

Le polynôme P_n est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points $x_0, x_1, \dots, x_n$

Les polynômes $L_i(x)$ sont applelés polynômes de base de Lagrange associés à ces points.

<u>Démonstration :</u>

*<u>*Existence :</u>* Il suffit de vérifier que le polynôme proposé est bien solution du problème.

Remarquons d'abord que

$$\forall\, j \in [\![0, n]\!] \quad : \quad L_i(x_j) = \prod_{k\neq i}^{n} \frac{(x_j - x_k)}{(x_i - x_k)} = \Big(\prod_{k\neq i}^{n} (x_j - x_k)\Big) / \Big(\prod_{k\neq i}^{n} (x_i - x_k)\Big) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \ si\ i = j \\ 0 \ si\ i \neq j \end{cases}$$

En effet :

Si $i \neq j$: k prend toutes les valeurs autres que i , donc il prendra la valeur j à un moment donné et le numérateur sera nul.

Si $i = j$: Le numérateur est égal au dénominateur….

Le polynôme $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$ convient car :

$$\forall\, j \in [\![0, n]\!] : \boldsymbol{P_n(x_j)} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x_j) = \boldsymbol{f(x_j) * L_j(x_j) = f(x_j)}$$

En effet,comme indiqué ci-dessus, pour toutes les valeurs de i différentes de j , $L_i(x_j) = 0$.

Exercice 7 : **Le but est de construire une fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à $n = 2$ dont la courbe représentative passe par les 3 points $A_0(-1\,;6)$ $A_1(1\,;0)$ …. $A_2(2\,;3)$**

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)L_i(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

Exrpimons d'abords les polynômes de base L_0 et L_2

Il est inutile de s'intéresser à L_1 car $f(x_1) = f(1) = 0$ d'après l'énoncé.

$$L_i(x) = \prod_{k=0\ k\neq i}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$$

$$L_0(x) = \prod_{k=1}^{2} \frac{(x-x_k)}{(x_0-x_k)} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} * \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-1}{-2} * \frac{x-2}{-3} = \frac{1}{6}(x^2-3x+2)$$

$$L_2(x) = \prod_{k=0}^{1} \frac{(x-x_k)}{(x_2-x_k)} =$$

$$P_n(x) = f(-1)L_0(x) + f(2)L_2(x) = 6 * \frac{1}{6}(x^2-3x+2) + 3 * \frac{1}{3}(x^2-1) = \underline{\mathbf{2x^2 - 3x + 1}}$$

<u>On vérifie bien sûr que les 3 images sont correctes…</u>

Pour s'entraîner sur un autre exemple, il suffit d'écrire une fonction polynomiale de degré n , de déterminer l'image de $n+1$ nombres et de « s'amuser » à retrouver la fonction grâce aux polynômes de Lagrange.

<u>Proposition 6 :</u> Relations coefficients/racines : polynôme de degré 2

Soient S, P, x_1, x_2 quatre nombres réels.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1\, x_2 = P \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont les racines du polynômes } X^2 - SX + P$$

<u>Démonstration :</u>

=> X² - SX + P = X²-$(x_1 + x_2)$X + $x_1\,x_2$ = (X-x_1)(X $- x_2$) donc x_1 *et* x_2 sont bien les racines du polynôme

<= $x_1 = \frac{S+\sqrt{S^2-4P}}{2}$ et $x_2 = \frac{S-\sqrt{S^2-4P}}{2}$ on a bien $x_1 + x_2 = S$ et $x_1\,x_2 = P$

<u>Ex :</u> $\begin{cases} 5+(-2) = \\ 5*(-2) = \end{cases}$ ⇔ *et* sont les racines du polynôme ……..

<u>Exercice 8 :</u>

1) On remarque que 2 est solution de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$. Quelle est l'autre solution ?

2) Un rectangle peut-il avoir un périmètre de 16m et une aire de 8 m² ? Si oui, donner sa longueur et sa largeur.

V) Multiplicité (ou ordre) d'une racine

Définition : a est une racine de multiplicité $m \geq 1$ si $(X-a)^m$ divise A et que $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas A.

Si m=1 , on parle de racine simple. Si m=2 , on parle de racine double. Si m=3 , on parle de racine triple.

Proposition 5 : soit P un polynôme.

a est une racine d'ordre $m \geq 1$ de P ⇔ $P(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$

Exercice 9: multiplicité d'une racine

Soient a et b deux réels et P le polynôme tel que $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$

1) Montrer que si le réel 1 est racine de P, son ordre de multiplicité est au moins 2.

2) Existe-t-il des réels a et b tels que le réel 1 soit racine de P d'ordre supérieur à 2 ?
Si oui, quel est alors son ordre de multiplicité ?

Exercice 10 : multiplicité d'une racine

Soit P un polynôme.

On appelle Q le polynôme défini par $Q(X) = (X-a)\big(P'(X) + P'(a)\big) - 2\big(P(X) - P(a)\big)$

Montrer que a est une racine d'ordre supérieur ou égal à 2.

Indice :Il faut montrer que a est racine de Q et de sa dérivée $(Q(a) = Q'(a) = 0)$

VI) Exercices

Exercice 11 : Les polynômes de Tchebychev

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in N}$ de la manière suivante :

$$T_0(X) = 1,\ \ T_1(X) = X\ \ ,et\ \ \forall n \in N : T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

1) Calculer T_2, T_3 *et* T_4

2) Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n : $\deg(T_n) = n$ puis déterminer le coefficient dominant de T_n

3) Etude de la parité
   a) Conjecturer la parité de T_n en fonction de n
   b) Prouver par récurrence que : $\forall n \in N\ \ T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$

4) Prouver que $\forall n \in N\ \ , T_n(1) = 1$

5) Montrer que $\forall\ (m,n) \in N^2\ ,\ \ m \leq n \Rightarrow 2T_nT_m = T_{m+n} + T_{n-m}$

6) Montrer que $\forall\ (m,n) \in N^2\ ,\ \ T_m\big(T_n(X)\big) = T_{mn}(X)$

Exercice 12 (plus difficile): On recherche les polynômes non nuls divisibles par leur propre dérivée

On procède en quatre étapes.

1ère étape : On montre que le problème a un sens en exhibant des exemples de solutions.

2ième étape : On suppose le problème résolu pour un polynôme non nul et on en déduit la forme nécessaire d'un tel polynôme.

3ième étape : Réciproquement on vérifie que la forme particulière trouvée est une solution.

4ième étape : On résout complètement le problème.

1) Vérifier que les polynômes $P(X) = X$; $P(X) = X - 1$ et $P(X) = (X+1)^2$ font partie des solutions
2) On suppose que le polynôme P , de degré n , de coefficient dominant a_n, est divisible par son polynôme P'.
   a) Démontrer que $n \geq 1$
   b) Démontrer qu'il existe un réel $\propto$ tel que $P(X) = \frac{1}{n}\ (X-\propto)P'(X)$
   c) Démontrer que si $k\ est\ un\ entier$ $0 \leq k \leq n$ alors $P^{(k)}(X) = \frac{1}{n-k}\ (X-\propto)P^{(k+1)}(X)$
   d) Démontrer que le polynôme P vérifie l'égalité $P(X) = a_n(X-\propto)^n$
   e)
3) Soit $A(X) = \delta\ (X-\alpha)^n$ $où$ $(n, \delta, \alpha) \in N^* x\ R^* x\ R^*$

   Vérifier que le polynôme A est une solution du problème

4) Décrire l'ensemble des solutions du problème.

VII) EXTRAITS DU CONCOURS GENERAL

1) Exercice 1 du sujet 2019

La fonction f est une *fonction polynomiale* si f est nulle ou s'il existe un entier $d \geqslant 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_d$ avec $a_d \neq 0$ tels que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Les nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_d$ sont alors appelés coefficients de la fonction polynomiale f.

Si $\mathscr{S}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$, on définit les propriétés :

(P1) $\mathscr{S}$ contient u et v.

(P2) $\mathscr{S}$ contient toutes les fonctions constantes positives.

(P3) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f+g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P4) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f \circ g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P5) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$ avec $f \geqslant g$, alors $f-g$ est dans $\mathscr{S}$.

(P6) Si f et g sont dans $\mathscr{S}$, alors $f \times g$ est dans $\mathscr{S}$.

1) Soit $\mathscr{T}$ un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P3)**, **(P4)**, **(P5)** et **(P6)**.
   a) Soit ℓ la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par $\ell(x) = x$. Démontrer que la fonction ℓ est dans $\mathscr{T}$.
   b) Déterminer toutes les fonctions affines qui sont dans $\mathscr{T}$.
   c) Soit p la fonction polynomiale définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Démontrer que la fonction p est dans $\mathscr{T}$.
   d) Une fonction polynomiale de $\mathscr{P}$ est-elle toujours dans $\mathscr{T}$?
2) Dans cette question, on suppose que $\mathscr{U}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P3)**, **(P4)** et **(P5)**, mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété **(P6)**. La réponse donnée à la question d) est-elle encore valable ?

3) Dans cette question, on suppose que $\mathscr{V}$ est un ensemble de fonctions de $\mathscr{P}$ qui vérifie les propriétés **(P1)**, **(P2)**, **(P4)**, **(P5)** et **(P6)**, mais on ne suppose pas qu'il vérifie la propriété **(P3)**.
   a) Soit d un entier naturel non nul. On note Q_d la fonction définie, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, par

$$Q_d(x) = (x+1)^d - 1.$$

   Montrer que $Q_d \in \mathscr{V}$.
   b) Soit d un entier naturel non nul. Démontrer qu'il existe des nombres entiers $a_1, \ldots, a_d$ supérieurs ou égaux à 1 tels que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$(x+1)^d = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + 1.$$

   Étant donné un nombre réel $x \geqslant 0$, on introduira une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres d et $\frac{x}{1+x}$.

   c) Soit f une fonction polynomiale telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \geqslant 0$ et un entier naturel non nul d tels que la fonction qui, à tout nombre réel $x \geqslant 0$, associe

$$c(x + x^2 + \cdots + x^d) - f(x)$$

   est une fonction polynomiale dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.
   d) En déduire que, si f est une fonction polynomiale de $\mathscr{P}$ telle que $f(0) = 0$, alors f est dans $\mathscr{V}$.

Exercice 1 du sujet 2018 : **Les polynômes de Bernstein**

Partie A : Les polynômes de Bernstein

Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel i compris entre 0 et n, on note $B_{n,i}$ le polynôme défini pour p variant dans l'intervalle $[0;1]$ par

$$B_{n,i}(p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

avec $\binom{n}{i}$ le coefficient binomial, i parmi n. Ainsi $B_{0,0}(p) = 1$; $B_{1,0}(p) = 1-p$ et $B_{1,1}(p) = p$.
Ces polynômes sont appelés ***polynômes de Bernstein.***

1° (a) Donner l'expression de $B_{2,0}(p)$, $B_{2,1}(p)$ et $B_{2,2}(p)$.

(b) Déterminer l'expression des polynômes de Bernstein pour $n=3$, à savoir $B_{3,0}(p)$, $B_{3,1}(p)$, $B_{3,2}(p)$ et $B_{3,3}(p)$.

2° (a) Quelle est l'expression de $B_{n,0}(p)$ et de $B_{n,n}(p)$?

(b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout i compris entre 1 et $n-1$,

$$B_{n,i}(p) = (1-p)B_{n-1,i}(p) + p\,B_{n-1,i-1}(p).$$

3° (a) En quelle(s) valeur(s) $p \in [0;1]$ s'annule un polynôme de Bernstein ?
On raisonnera en distinguant les cas selon les valeurs de n et de i.

(b) Qu'en est-il de son signe sur $[0;1]$?

4° Démontrer que les polynômes de Bernstein d'un même degré n forment une partition de l'unité : c'est-à dire, pour tout entier naturel n,

$$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = B_{n,0}(p) + B_{n,1}(p) + \ldots + B_{n,n-1}(p) + B_{n,n}(p) = 1.$$

5° Déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{i=0}^{n} i\,B_{n,i}(p) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p).$$

Que représentent ces sommes en termes probabilistes ?

CORRECTION

Lien vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=coGd2ykgYfg