TP sur les développements limités.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant O ; n est un entier naturel.

On dit que la fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0 s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n et une fonction ε tels que :

$$f(x) = P_{(x)} + x^n\varepsilon(x) = a_0 + a_1x + a_1x^2 + \cdots \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

Avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

$a_0 + a_1x + a_1x^2 + \cdots \ldots + a_nx^n$ s'appelle la partie régulière.

Propriété :

Si f admet un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en O, de partie régulière $a_0 + a_1x + a_1x^2 + \cdots \ldots + a_nx^n$, alors f est dérivable en 0 et la courbe représentative de f admet une tangente non verticale au point d'abscisse 0, d'équation réduite $y = a_0 + a_1x$

Vous connaissez déjà un développement limité à l'ordre 0 d'une fonction : c'est l'équation de la tangente.

Rappel de l'équation de la tangente à la courbe en un point d'abscisse a :

$$y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$$

Un développement limité se calcule à l'aide de logiciel de calcul formel et/ou de calculatrices CAS (T-inspire cas, casio GRAPH 100,etc)

Voici quelques commandes :

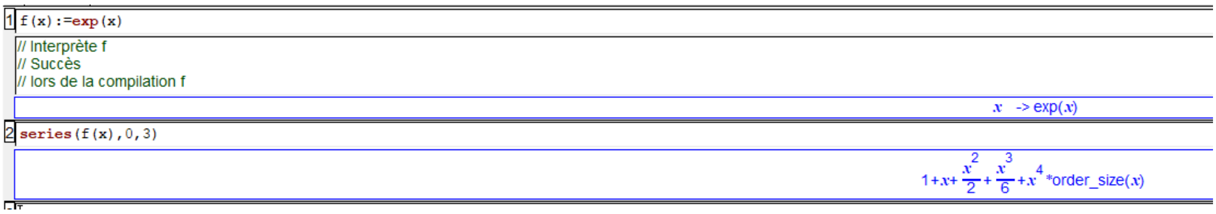
Sur **GEOGEBRA**, on utilise la commande **PolynômeTaylor[<Fonction>, <Valeur x>, <Ordre>]**

Avec **MAXIMA** :

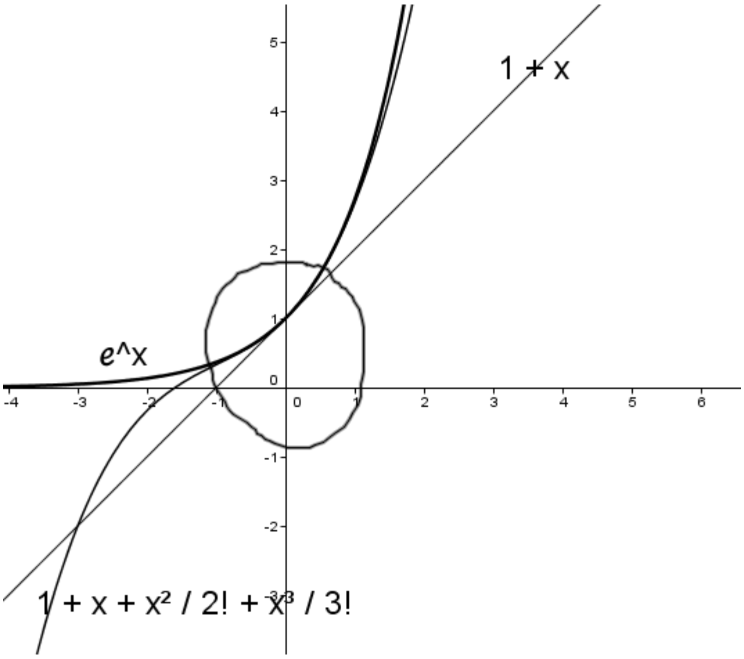
```
(%i1) taylor(exp(x), x, 0, 3);
```

(%o1) $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+...$

Avec **Xcas** :



Exemple PolynômeTaylor[exp(x), 0, 3] avec GEOGEBRA pour trouver le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $exp(x)$



$f(x) = 1 + x + x^2 / 2! + x^3 / 3!$ A savoir : $2\,! = 2 \times 1 = 2$ *et* $3\,! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Donc $exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Du développement limité de la fonction en 0, on peut en déduire les éléments suivants :

- L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de $exp(x)$ au point d'abscisse 0 est y=x+1
- De plus $exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ développement limité en 0 à l'ordre 2.

  Donc $exp(x) - (1 + x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

  La fonction $exp(x)$ est au dessus de sa tangente car $\frac{x^2}{2}$ est positif.

Le développement limité sert essentiellement (dans le cadre du BTS) à trouver l'équation de la tangente au point considéré et à trouver la position relative de la courbe de la fonction par rapport à sa tangente.

Quelques développements limités classiques (trouvés avec MAXIMA) :

```
(%i2) taylor(exp(x), x, 0, 5);
```
(%o2) $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+...$

```
(%i7) taylor(log(1+x), x, 0, 5);
```
(%o7) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+...$

```
(%i8) taylor(sin(x), x, 0, 5);
```
(%o8) $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+...$

```
(%i9) taylor(cos(x), x, 0, 5);
```
(%o9) $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+...$

```
(%i10) taylor(1/(1+x), x, 0, 5);
```
(%o10) $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+...$

```
(%i11) taylor((1+x)^2, x, 0, 5);
```
(%o11) $1+2\,x+x^2+...$

```
(%i13) taylor((1+x)^3, x, 0, 5);
```
(%o13) $1+3\,x+3\,x^2+x^3+...$

En utilisant ces développements, donner les équations des tangentes en O, ainsi que leur position relative.

Un extrait du BTS 2013 :

3° Un logiciel de calcul formel fournit le développement limité de la fonction *f*, à l'ordre 3, au voisinage de zéro : $f(x) = 0{,}25\,x - 0{,}031\,25\,x^3 + x^3\,\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Ce résultat est admis et n'est donc pas à démontrer.

a) En déduire une équation de la tangente *T* à la courbe *C* au point d'abscisse 0.

b) Étudier la position relative de *T* et de *C* au voisinage du point d'abscisse 0, pour *x* positif.

Traiter les deux questions.

PARTIE INFORMATIQUE.

Dans MAXIMA, on cherche le développement limité de la fonction exp(x) au voisinage de O à l'ordre 3. On tape la commande suivante :

```
(%i1) taylor(exp(x), x, 0, 3);
```

(%o1) $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+...$

Dans XCAS :

```
1 f(x):=exp(x)
// Interprète f
// Succès
// lors de la compilation f
```

$x \ \text{->}\ \exp(x)$

```
2 series(f(x),0,3)
```

$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^4\,\text{*order\_size}(x)$

Il faut interpréter l'affichage du logiciel et réponde de la façon suivante :

$$\mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1} + \boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{x}^2}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{x}^3}{\mathbf{6}} + \boldsymbol{x}^3\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) \textbf{ avec } \lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

En utilisant le même affichage écrire le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0

Utiliser MAXIMA pour écrire le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de exp(x)

En utilisant le logiciel de votre choix,

- déterminer les développements limités ;
- déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse demandé ;
- Préciser la position de la tangente à la courbe au point d'abscisse demandé ;
- Vérifier avec GEOGEBRA

$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ en 0 à l'ordre 4.

$g(x) = \frac{1}{1-x}$ en 0 à l'ordre 3.

$h(x) = (1-5x)e^{-2x}$ en 0 à l'ordre 2.

$t(x) = 1 - e^x + \frac{1}{2}\cos(x)$ au voisinage de de 0 à l'ordre 2.

$l(x) = 0{,}25x \exp(-0{,}125x^2)$ à l'ordre 3 en 0

$t(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$ à l'ordre 2 au voisinage de 0