

🌀 Brevet de technicien supérieur Nouvelle-Calédonie 🌀
session 2014 - groupement B

Exercice 1

10 points

Dans cet exercice, on considère une fonction utilisée pour le calcul de probabilités.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3} .

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): y'' + 2y' + y = 0.$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $r^2 + 2r + 1 = 0$.
2. En déduire les solutions définies sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = 0$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. Un logiciel de calcul formel fournit la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

(%i1)	<code>f(x) := (1/2) * (x + 1) * %e^(-x);</code>
(%o1)	<code>f(x) := 1/2 (x + 1) %e^(-x)</code>
(%i2)	<code>limit(f(x), x, +inf);</code>
(%o2)	<code>0</code>

Ce logiciel note $\%e^(-x)$ l'expression e^{-x} . Le résultat, admis, n'a pas à être justifié. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?

2. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

On note f' la dérivée de la fonction f . Une expression de $f'(x)$ est :

$f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}$	$f'(x) = -\frac{1}{2}xe^{-x}$	$f'(x) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-x}$
------------------------------	-------------------------------	-----------------------------------

3. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$.
4. Donner le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.

C. Application à des calculs de probabilités

1. Soit F la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+2)e^{-x}.$$

Vérifier que F est une primitive sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction f définie à la partie B.

2. On admet qu'il existe une variable aléatoire T telle que, pour tout nombre réel positif x , la probabilité de l'évènement $(T \leq x)$ est donnée par $p(T \leq x) = F(x)$.

a. Calculer $p(T \leq 1)$.

b. On recherche le nombre réel m tel que $p(T \leq m) = \frac{1}{2}$.

À l'aide d'une calculatrice, donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de m . Expliquer votre démarche.

Le réel m est appelé médiane de la variable aléatoire T .

Exercice 2**10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3} .

Une entreprise de location de véhicules possède un grand nombre de véhicules de même type.

Elle s'intéresse d'une part au nombre de véhicules en panne par jour, d'autre part à la consommation moyenne de carburant par véhicule pour 100 km.

A. Statistique descriptive et loi de Poisson

Pour étudier le nombre de véhicules en panne par jour, on a relevé chaque jour, pendant quarante jours ouvrables, le nombre de véhicules en panne. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant.

Nombre de véhicules en panne	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de jours	2	5	8	9	8	6	2

- Donner, à l'aide d'une calculatrice, la moyenne et l'écart type de cette série statistique.
- On note X la variable aléatoire qui, à chaque jour ouvrable d'une année fixée, associe le nombre de véhicules en panne constatés ce jour là. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.
Calculer les probabilités suivantes :

a. $P(X = 1)$;

b. $P(X \leq 3)$.

B. Loi normale

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque véhicule de location de l'entreprise, associe sa consommation moyenne de carburant, exprimée en litres pour 100 km.

On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 7 et d'écart type 0,5.

À l'aide du formulaire ou de la calculatrice, calculer les probabilités suivantes :

1. $P(Y \leq 8)$;
2. $P(6,5 \leq Y \leq 7,5)$.

C Test d'hypothèse

L'entreprise renouvelle l'ensemble de ses véhicules. Elle se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler la moyenne μ inconnue de la consommation de carburant (exprimée en litres pour 100 km) de l'ensemble des nouveaux véhicules.

On désigne par \bar{Z} la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 50 nouveaux véhicules prélevés dans l'ensemble des nouveaux véhicules, associe la moyenne des consommations de carburant (exprimées en litres pour 100 km) de ces 50 véhicules. L'ensemble des véhicules est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.

L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 7$.

L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 7$.

Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0 , on admet que la variable aléatoire \bar{Z} suit la loi normale de moyenne 7 et d'écart type 0,07.

Déterminer ; sous l'hypothèse H_0 , le nombre réel h positif tel que :

$$P(7 - h \leq \bar{Z} \leq 7 + h) = 0,95.$$

2. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
3. *Cette question est un questionnaire à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

On prélève un échantillon aléatoire de 50 véhicules et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des consommations de carburant (exprimées en litres pour 100 km) est $\bar{z} = 7,1$.

Au seuil de 5 % :

on accepte l'hypothèse $\mu = 7$	on rejette l'hypothèse $\mu = 7$	on ne peut pas conclure
-------------------------------------	-------------------------------------	----------------------------