BTS Métropole–Antilles–Guyane groupement B
14 mai 2018 Éléments de correction

Exercice 1

A. Résolution d'une équation différentielle

$(E) : y' - 0,2y = 3t$

1. Sur $[0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle (E_0) :

$$y' - 0,2y = 0.$$

A pour solution générale : $y = k\mathrm{e}^{0,2t}$ où k est une constante réelle quelconque

2. La fonction g, définie sur $[0\,;3]$ par $g(t) = -15t - 75$, est solution de l'équation différentielle (E), si $g'(t) - 0,2g(t) = 3t$
$g(t) = -15t - 75$, donc $g'(t) = -15$ et

$$g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2\times(-15t) - 0,2\times(-75) = -15 + 3t + 15 = 3t$$

, cqfd

3. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est :
$\{t \mapsto -15t - 75 + k\mathrm{e}^{0,2t},\ t \geq 0, k \text{ constante réelle}\}$.

4. La fonction f est solution de (E), donc $f(t) = -15t - 75 + k\mathrm{e}^{0,2t},\ t \in \mathbb{R}^+$
f vérifie la condition initiale $f(0) = 0$, donc $-15\times 0 - 75 + k\mathrm{e}^{0,2\times 0} = 0$, d'où $k = 75$ et
$f(t) = -15t - 75 + 75\mathrm{e}^{0,2t} = -15t + 75\left(\mathrm{e}^{0,2t} - 1\right)$.

B. Étude de fonction et application

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ par

$$f(t) = 75\left(\mathrm{e}^{0,2t} - 1\right) - 15t.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. **a.** $f'(t) = 15\mathrm{e}^{\frac{1}{5}t} - 15$

   Sur $[0\,;3]$, l'inéquation $f'(t) \geqslant 0 \iff 15\mathrm{e}^{\frac{1}{5}t} \geqslant 15 \iff \mathrm{e}^{\frac{1}{5}t} \geqslant 1$, c'est-à-dire $t \geqslant 0$, ainsi $f'(t)$ est positive sur $[0\,;3]$.

   b. $f'(t) \geqslant 0$, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;3]$.

2. On rappelle que $f(t)$ correspond à la distance parcourue par le wagon, en km, à l'instant t, en minute.
Au bout d'une minute.le wagon va prcourir $f(1)$ km, soit 1,605 km environ

3. **a.** La vitesse du wagon, en kilomètre par minute, à l'instant t, correspond à $f'(t)$.
   En 2 minutes la vitesse du wagon s'élève $f'(2)$ soit $7,38km$ par mn

   b. En 2 mn, la vitesse du wagon est de $7,38kmmn^{-1}$ soit $7,38\times 60km$ par heure, c'est-à-dire 442,67 kmh^{-1}, l'objectif des ingénieurs est largment atteint qui est de 400 kmh^{-1}

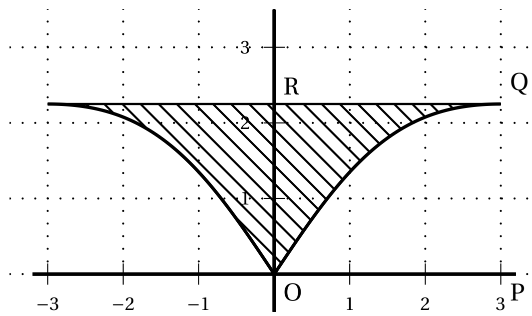
4. Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :

$$y = f'(2)(t-2) + f(2) = f'(2)t - 2f'(2) + f(2)$$

$f(2) = 75(\mathrm{e}^{0,4} - 1) - 30$, $f'(2) = 15(\mathrm{e}^{0,4} - 1)$
$-2f'(2) + f(2) = -30(\mathrm{e}^{0,4} - 1) + 75(\mathrm{e}^{0,4} - 1) - 30 = 45\mathrm{e}^{0,4} + 30 - 75 - 30$
Donc la tangente en 2 a pour équation : $y = \left(\mathrm{e}^{0,4} - 1\right)t + 45\mathrm{e}^{0,4} - 75$

C. Calcul intégral

Afin d'aménager les futures gares dédiées à ce train à très haute vitesse, les architectes ont dessiné la pièce suivante, représentée dans un repère orthonormé avec pour unitégraphique 1 mètre sur les deux axes.



On désire calculer de façon précise l'aire $\mathscr{A}$ de la surface hachurée sur le dessin. Pour cela on dispose des données suivantes :

— la pièce est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
— le bord supérieur correspond à la droite d'équation $y = 2,25$;
— le bord inférieur droit correspond à la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 3]$ par :

$$g(x) = \frac{27x}{2x^2 + 18}.$$

1. L'aire $\mathscr{A}_1$ du rectangle OPQR, en unité d'aire (u. a.) est $\mathscr{A}_1 = 2,25 \times 3 = 6,75$

2. Une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 3]$ est $G : x \to \frac{27}{4}\ln\left(x^2 + 9\right)$

L'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe représentative de la fonction g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$ est $\mathscr{A}_2 = G(3) - G(0)$.

$G(3) = \frac{27}{4}\ln 18$ et $G(0) = \frac{27}{4}\ln 9$

$\mathscr{A}_2 = \frac{27}{4}(\ln 18 - \ln 9) = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$

3. L'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire, vaut $2(\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2) \approx 6,75 - 4,679 \approx 4,143\text{u.a.}$.

Exercice 2

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'obsolescence programmée de certains modèles de smartphone. L'obsolescence programmée consiste à limiter volontairement la durée de vie d'un produit afin d'augmenter le taux de remplacement et accroître les profits.

A. Probabilités conditionnelles

Une association de consommateurs a observé deux types d'obsolescence programmée sur une population de 200 smartphones.
La première est l'obsolescence technique, lorsqu'un composant tombe en panne et ne peut être remplacé. Cela concerne 3 % des smartphones étudiés.
La seconde est l'obsolescence logicielle, quand un produit est trop vieux pour être mis à jour et devient inutilisable ou incompatible. Cela concerne 8 % des smartphones étudiés.
De plus, parmi les smartphones touchés par l'obsolescence logicielle, on compte 12,5 % de smartphones également touchés par l'obsolescence technique.

1. D'après l'énoncé, on obtient le tableau d'effectifs suivant :.

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	12,5%× 16=2	4	3%× 200=6
non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	8%× 200=16	184	200

2. On prélève au hasard un smartphone parmi les 200 étudiés.
On note T l'évènement : « le smartphone prélevé est touché par l'obsolescence technique »et L l'évènement : « le smartphone prélevé est touché par l'obsolescence logicielle ».

D'après les informations figurant dans l'énoncé, on a immédiatement : $P(T) = 0,03$, $P(L) = 0,08$ et $P_L(T) = 0,125$.

3. **a.** $P(T \cap L) = \dfrac{2}{200} = 0,01$.

b. $P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = 0,1$.

c. $P_T(L) = \dfrac{P(T \cap L)}{P(T)} = \dfrac{0,01}{0,03} = \dfrac{1}{3}$.

B. Loi binomiale

1. Le prélèvement d'un smartphone est une épreuve de Bernoulli, avec :

— succès :le smartphone non réparable et P(succès)=0,045

— echec : le smartphone est réparable

Cette même épreuve est répétée 50 fpis de ma nière indépendante, car les prélèvements sont assimilés à des tirages avec remise, on est donc en présence d'un schéma de Bernoulli, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,045$.

2. Tous les smartphones sont réparables signifie que $X = 0$, et $P(X = 0) = 0,1$.

3. **a.** L'exécution de l'algorithme donne les résultats suivants :

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

b. Á la fin de l'algorithme $S \approx 0,813$. $S = P(X \leqslant 3)$

4. L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = 50 \times 0,045 = 2,25$. Ce résultat indique que pour tout lot de 50 smartphone, on aura, en moyenne, 2,25 smartphone non réparables .

C. Test d'hypothèse

D'après un sondage issu de la presse écrite, 55 % des français pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée.
L'hypothèse nulle H_0 est : « $p = 0,55$ », le résultat du sondage est validé
L'hypothèse alternative H_1 est : « $p \neq 0,55$ », le résultat du sondage n'est pas valide
Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

1. $h = 0,07$
2. La règle de décision du test. Dans un échantillon de 180 personnes, si la fréquence des personnes déclarant que la marque B pratique l'obsolescence programmée est dans l'intervalle [0,48 ; 0.62], H_0 est acceptée avec un niveau de confiance de 95%, sinon H_0 est réjetée et H_1 est acceptée avec un risque de 5%.
3. On sait que, sur un échantillon aléatoire de 180 personnes interrogées, 76, soit 42%, pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. On peut conclure que l'hypothèse H_0 est rejetée et dire, avec un risque de 5%, que le résultat du sondage n'est pas validé.