

Corrigé du BTS Métropole–Antilles–Guyane 13 mai 2015 - groupement B

Exercice 1

10 points

A. Résolution d'une équation différentielle

1.

2. $r^2 + 5r + 4 = 0$ est une équation du second degré dont les solutions sont :
 $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$

3. D'après le rappel des formules, la solution générale, sur $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$y'' + 5y' + 4y = 0 \text{ est } y(x) = k_1 e^{-x} + k_2 e^{-4x}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles.

4. Le résultat du logiciel de calcul formel permet de dire que f , la solution générale sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y'' + 5y' + 4y = 10$$

a pour expression :

$$f(x) = k_1 e^{-x} + k_2 e^{-4x} + \frac{5}{2}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles.

B. Étude d'une fonction

1. D'après le graphique, la fonction $f : t \mapsto 3e^{-t} - 0,5e^{-4t} + 2,5$ semble décroissante sur $[0 ; +\infty[$

2. Pour tout $t \in [0 ; +\infty[$ $f'(t) = -e^{-4t}(3e^{3t} - 2)$, comme $3e^{3t} - 2 > 0$ sur $[0 ; +\infty[$, on sait également que pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, $e^{-4t} > 0$, donc $f'(t) < 0$ sur $[0 ; +\infty[$, par conséquent f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$

3. Le développement limité de la fonction f , à l'ordre 2, au voisinage de 0 est :
 $f(t) = 5 - t - \frac{5}{2}t^2 + t^2\epsilon(t)$, avec $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(t) = 0$.

4. $y = -t + 5$ est l'équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.

5. Pour l'étude de la position relative de T par rapport à \mathcal{C} , il suffit d'étudier le signe de $f(t) - (-t + 5)$ au voisinage de 0.

D'après 2. a. $f(t) - (-t + 5) = -\frac{5}{2}t^2 + t^2\epsilon(t) = -t^2\left(\frac{5}{2} + \epsilon(t)\right)$, or $\frac{5}{2} + \epsilon(t)$ est positif car au voisinage de 0, $\epsilon(t)$ est négligeable devant $\frac{5}{2}$. Donc $\text{signe}(f(t) - (-t + 5)) = \text{signe}(-t^2)$, d'où $f(t) - (-t + 5) \leq 0$, par conséquent T est au dessus \mathcal{C} .

6. $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-4t} = 0$
par somme $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2,5$.

7. Cette limite indique que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote d'équation $y = 2,5$ au voisinage de $+\infty$

C. Application au transfert de la pièce sur la tapis roulant

1. On peut observer que pour tout $t \in [0; +\infty[$, $2,5 < f(t) \leq 5$.

Le tapis est à 250 cm = 2,5 m du sol, la pièce peut être transférée dès qu'elle se situe à 251 cm du sol soit 2,51 m. On cherche t_0 tel que $2,5 \leq f(t) \leq 2,51$, pour cela on trace la droite d'équation $y = 2,51$, cette droite coupe la courbe en un seul point d'abscisse t_0 . Graphiquement on trouve $t_0 \approx 5,7$

2. L'exécution de 3 étapes de cet algorithme donne les résultats suivants :

	étape 1	étape 2	étape 3
a	5	5,5	5,5
b	6	6	5,75
$b - a$	1	0,5	0,25
m	5,5	5,75	5,625

3. L'amplitude de l'encadrement de t_0 fourni à l'issue des trois étapes vaut 0,25. Cette amplitude est supérieure à 0,1 (condition d'arrêt de la boucle)

La traduction de cet algorithme avec **R-Project** donne :

```
f<-function(x){3*exp(-x)-0.5*exp(- 4*x) + 2.5}
a<-5; b<-6
while((b - a) > 0.1){m<-(a+b)/2; ifelse(f(m) > 2.51,a <- m,b <-
m)}
print(paste('a=',a,'et b=',b))
```

```
[1] « a= 5.6875 et b= 5.75 »
```

Exercice 2

10 points

A. Loi exponentielle

- La variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ , on écrit : $T \sim \mathcal{E}(\lambda = 0,005)$, donc
 $P(T \leq 100) = 1 - e^{-0,005 \times 100} \approx 0,393$.
- $E(T) = \frac{1}{0,005} = 200$. Sur une longue période, la durée de fonctionnement moyenne entre deux calibrages est égale à 200 heures.

B. Loi binomiale et loi normale

- Chaque prélèvement d'un rivet est une épreuve de Bernoulli, avec les deux événements contraires : **succès** qui correspond à un rivet prélevé **non conforme** et échec qui correspond à un rivet conforme, d'après l'énoncé **$P(\text{succès})=0,01$** . Cette **même épreuve** est **répétée 500 fois**, de plus les épreuves sont **indépendantes** car le prélèvement du lot de 500 rivets est assimilé à un tirage avec remise. La variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès, à l'issue de cette expérience aléatoire, est la somme de 500 variables de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p = 0,01$. D'où X suit la **loi binomiale de paramètres $n=500$ et $p=0,01$** . On écrit : $X \sim \mathcal{B}(500; 0,01)$
- $P(X = 0) = 0,007$. Il y a 7 chances sur 1 000 d'avoir un rivet non conforme sur un lot de 500 rivets prélevés au hasard dans le stock.
 - On cherche $P(X \leq 7) = 0,868$
- Si on approche X par la variable aléatoire Y qui suit une loi normale, celle-ci est caractérisée par ses paramètres $m = E(X) = np = 500 \times 0,01 = 5$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5 \times 0,99} \approx 2,22$

- b. $P(Y \leq 7,5) \approx 0,870$, on sait que $P(X \leq 7)$ est approchée par $P(Y \leq 7,5)$ (correction de continuité). L'approximation est valable car l'écart est voisin de 0,002

C. Test d'hypothèse

1. $\bar{Z} \sim \mathcal{N}(45 ; 0,015)$, d'après les résultats fournis $h = 0,0294$
2. Règle de décision : On prélève un échantillon au hasard de taille $n = 100$ rivets, on calcule sa moyenne \bar{z} , si $\bar{z} \in [44,971 ; 45,029]$, on accepte H_0 avec un risque de 5%, sinon on rejette H_0 avec le même risque.
3. Ici $\bar{z} = 45,03 \notin [44,971 ; 45,029]$, on peut rejeter H_0 et conclure, avec un risque de 5%, que la livraison n'est pas conforme pour le diamètre.