BTS groupe B1 Nouvelle Calédonie
9 novembre 2015

Exercice 1.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendantes.
Dans cet exercice, les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (**??**) :

$$y'' + 2y' + y = 0, \qquad \text{(E)}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa dérivée seconde.

1° **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 2r + 1 = 0$.

b. En déduire les solutions de l'équation différentielle (**??**). On fournit les formules suivantes.

Document 1. —

Équation	*Solutions sur un intervalle I*
Équation différentielle : $ay'' + by' + c = 0$. *Équation caractéristique :* $ar^2 + br + c = 0$ *de discriminant* Δ.	• *Si* $\Delta > 0$, $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, *où* r_1 *et* r_2 *sont les racines de l'équation caractéristique.* • *Si* $\Delta + 0$, $y(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt}$, *où* r *est la racine de l'équation caractéristique.* • *Si* $\Delta < 0$, $y(t) = \left[\lambda \cos \beta t + \mu \sin(\beta t)\right] e^{\alpha t}$, *où* $r_1 = \alpha + i\beta$ *et* $r_1 = \alpha - i\beta$ *sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.*

2° On a représenté dans la figure **??**, à l'aide d'un logiciel, trois solutions f_a, f_b et f_c de l'équation différentielle (**??**) avec :

- $f_a(x) = (2x + 3) e^{-x}$;
- $f_b(x) = e^{-x}$;
- $f_c(x) = (4x + 5) e^{-x}$.

Associer à chacune des fonctions f_a, f_b et f_c sa courbe représentative parmi les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

Partie B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x + 3) e^{-x}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1° Un logiciel de calcul formel donne ci-dessous une limite de la fonction f.
La ligne d'entrée (%i1) est la ligne de commande du calcul de la limite.
La ligne notée (%o1) est la ligne de sortie.

```
(%i1) limit((2*x+3)*exp(-x),x,+inf) ;
(%o1) 0  ;
```

a. En utilisant ce résultat qu'on ne demande pas de démontrer donner $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Interpréter graphiquement cette limite en terme d'asymptote.

2° Un logiciel de calcul formel donne ci-dessous une expression de la dérivée de f.
La ligne d'entrée (%i2) est la ligne de commande d'une écriture factorisée de la dérivée de f.
La ligne notée (%o2) est la ligne de sortie.
Ce logiciel note %e^{-x} la quantité e^{-x}.

```
(%i2) factor(diff((2*x+3)*exp(-x),x)) ;
(%o2) -(2x+1)%e^-x   ;
```

Le résultat fourni par le logiciel est admis et n'a pas à être justifié.

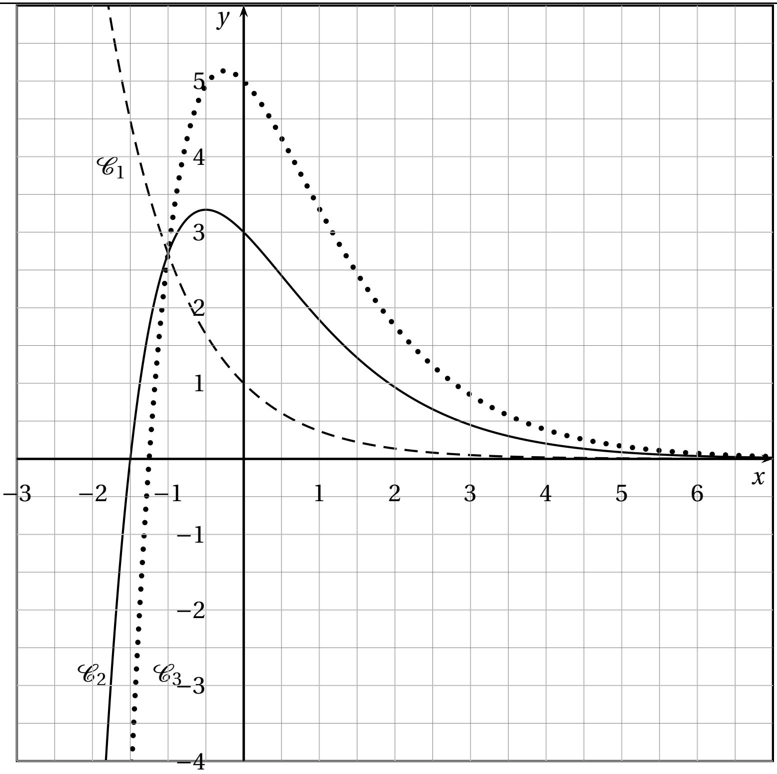

FIGURE 1 –

a. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3° Le logiciel de calcul formel permet d'obtenir le développement limité de la fonction f, à l'ordre 2, au voisinage de 0.
La ligne d'entrée `(%i3)` est la ligne de commande de ce développement limité.
La ligne notée `(%o2)/T/` est la ligne de sortie.

```
(%i3) taylor((2*x+3)*exp(-x),x,0,2) ;
(%o3) /T/ 3 - x - x^2/2 + ...  ;
```

Le résultat fourni par le logiciel est admis et n'a pas à être justifié.

a. Donner l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est :

RÉP. A. au dessus de $\mathscr{T}$;

RÉP. B. en dessous de $\mathscr{T}$;

RÉP. C. en dessous de $\mathscr{T}$ quand $x < 0$ et au dessus de $\mathscr{T}$ quand $x > 0$.

Partie C. Calcul intégral

On considère l'intégrale I définie par $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x$ où f est la fonction définie à la partie B, de courbe représentative $\mathscr{C}$.

1° Un logiciel de calcul formel donne ci-dessous une expression d'une primitive sur $\mathbb{R}$ de f. La ligne d'entrée `%i4` est la ligne de commande d'une écriture factorisée d'une primitive de f.
La ligne notée `%o4` est la ligne de sortie.
Ce logiciel note `%e^-x` la quantité e^{-x}.

```
(%i4) factor(integrate((2*x+3)*exp(-x),x)) ;
(%o4) -(2x+5)%e^-x  ;
```

Justifier ce résultat par un calcul.
On fournit les formules de dérivation suivantes :

Document 2. —

$f(t) = \mathrm{e}^{at} \quad ; \quad f'(t) = a\mathrm{e}^{at}$
$(u+v)' = u' + v'$
$(ku)' = ku'$
$(uv)' = u'v + v'u$

2° En déduire que $I = 5 - 9\,\mathrm{e}^{-2}$.

3° On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\,;\,2]$. Interpréter graphiquement l'intégrale I.

Exercice 2.

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendantes.
Dans cet exercice, les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3}.

Une entreprise fabrique des modèles originaux de soupapes, mais il existe sur le marché des contrefaçons qui ne remplissent pas les normes de sécurité.

Partie A. Statistique à deux Variables

Depuis des années, l'entreprise recueille le nombre de contrefaçons, exprimé en milliers, présentes sur le marché et a obtenu les résultats de la table **??**.

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de contrefaçons y_i (en milliers)	12,85	20,51	25,02	29,45	33,48	39,36	43,21	47,54

TABLE 1 –

1° Déterminer, à l'aide de la calculatrice, les coordonnées du point moyen G du nuage des huit points de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$.

2° Déterminer à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en x suivant la méthode des moindres carrés.

3° Estimer, à l'aide de la droite précédente, le nombre de contrefaçons présentes sur le marché en 2015.

Partie B. Probabilités conditionnelles

Pour éliminer les contrefaçons du marché, l'entreprise a mis au point un test optique permettant d'évaluer la conformité aux normes de sécurité.
On suppose que 0,5 % des soupapes proposées à la vente sur le marché en 2014 sont des contrefaçons.
On prélève au hasard une soupape proposée à la vente sur le marché 2014 et on la soumet au test.
On désigne par C l'évènement « la soupape prélevée est une contrefaçon » et par $\overline{C}$ l'évènement contraire « la soupape prélevée est un original ».
On désigne par T l'évènement « le test indique que la soupape est une contrefaçon » et par $\overline{T}$ « l'évènement contraire « le test indique que la soupape est un original ».
On suppose que la probabilité que le test indique une contrefaçon sachant qu'il s'agit d'une contrefaçon est égal à 0,85 et que la probabilité que le test indique un original sachant qu'il s'agit d'un original est de égale à 0,95.

1° Construire l'arbre de probabilités correspondant aux données.

2° En déduire $P(T)$.

Partie C. Test d'hypothèse

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la proportion p inconnue de contrefaçons mises en vente sur le marché en 2015. Pour cela, on prélève parmi les soupapes mises en vente sur le marché en 2015 un échantillon aléatoire de $n = 1000$ soupapes.

On note F la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 1000 soupapes ainsi prélevées, associe la fréquence des contrefaçons dans l'échantillon (le nombre de soupapes sur le marché est assez important pour que l'on puisse assimilé ces prélèvements à des tirages avec remise).

L'hypothèse nulle est H_0 : $p = 0,005$.

L'hypothèse alternative est H_1 : $p \neq 0,005$.

Le seuil de signification est fixé à 5 %.

On admet que, sous L'hypothèse H_0, la variable aléatoire F suit la loi normale de moyenne 0,005 et d'écart-type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx 0,002$

1° *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*

La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Sous l'hypothèse H_0, préciser parmi les nombres suivants, celui qui réalise la meilleur approximation du réel h tel que $P(0,005 - h \leqslant F \leqslant 0,005 + h) = 0,95$:

RÉP. A. 0,001 ; RÉP. B. 0,002 ; RÉP. C. 0,004 ; RÉP. D. 0,006.

2° En utilisant le résultat de la question précédente, énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

3° Sur un échantillon aléatoire de 1000 soupapes mises en vente en 2015, on a relevé 4 contrefaçons.
Peut-on au seuil de 5 %, conclure que la proportion de contrefaçons en 2015 est $p = 0,005$?

Partie D. Loi exponentielle

L'entreprise décide d'étudier la fiabilité des contrefaçons de son modèle de soupape. On désigne par T la variable aléatoire qui, à toute soupape de contrefaçon choisie au hasard sur le marché, associe sa durée de bon fonctionnement exprimée en mois.

On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,01$.

On rapelle que, pour tout nombre réel positif t, on a :

$$P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

1° Calculer la probabilité qu'une soupape de contrefaçon prise au hasard fonctionne bien sur une durée d'au plus 120 mois.

2° Calculer la probabilité qu'une soupape de contrefaçon prise au hasard fonctionne bien sur une durée d'au moins 100 mois.

3° On rappelle que l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T est égale à $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.
Calculer $E(T)$. Interpréter ce résultat.