BTS Nouvelle Calédonie
Novembre 2015.

(A) (E) $y'' + 2y' + y = 0$.

a) E.C : $r^2 + 2r + 1 = 0 \iff (r+1)^2 = 0$.

$\Delta = 0 \qquad \cancel{x} = -1$

b) Les solutions de (E) sont de la forme.

$$y(t) = (\lambda t + \mu)\, e^{-t}$$

2) $f_a(x) = (2x+3)\, e^{-x} \quad (\mathcal{C}_2)$

$f_b(x) = e^{-x} \quad (\mathcal{C}_1)$

$f_c(x) = (4x+5)\, e^{-x} \quad (\mathcal{C}_3)$

(B) $f(x) = (2x+3)\, e^{-x}$

1) a) $\lim_{x \to +\infty} (2x+3)\, e^{-x} = 0$

b) $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

2) $f'(x) = 2e^{-x} + (2x+3)(-e^{-x}) = e^{-x}(2 - 2x - 3)$

$f'(x) = e^{-x}(-2x-1) = -e^{-x}(2x+1)$.

a) $e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(-2x-1)$

$-2x - 1 > 0 \iff -2x > 1 \iff x < -\frac{1}{2}$.

Si $x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right] \qquad f'(x) \geq 0$

Si $x \in \left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[\qquad f'(x) \leq 0$.

b)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$2e^{\frac{1}{2}}$	↘	0

3) a) $\mathcal{T}_1$ tangente à $\mathcal{C}$ en $x=0$. : $y = 3-x$.

b) $f(x) - (3-x) = -\frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$
avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

$-\frac{x^2}{2}$ est négatif $\forall x \in \mathbb{R}$.

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) - (3-x) < 0$
$f(x) < 3-x$

$\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{T}_1$ (réponse B)

C $I = \int_0^2 f(x)\,dx$

1) On dérive la forme proposée

$F(x) = -(2x+5)e^{-x}$

$F'(x) = -2e^{-x} + ((-(2x+5) \times (-e^{-x})))$

$F'(x) = e^{-x}(-2 + 2x+5) = e^{-x}(2x+3)$

$F'(x) = f(x)$.

$F(x)$ est bien une primitive de f.

2) $I = [-(2x+5)e^{-x}]_0^2 = (-(2\times 2+5)e^{-2} + (2\times 0+5)e^{0})$

$I = (-9e^{-2} + 5) = 5 - 9e^{-2}$

3) I correspond à l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$.

Exercice 2

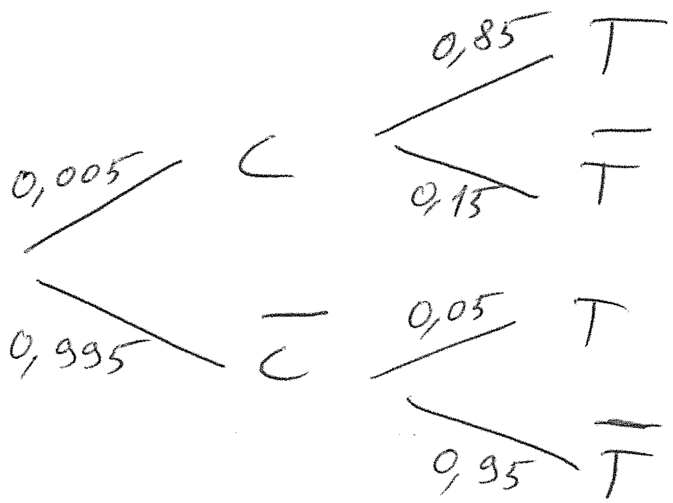
A 1) $G(4,5 ; 31,4275)$.

2) $y = 4,8x + 9,82$

3) En 2015 $x = 9$ donc $y \simeq 53,02$.

(B)

1)



2) $T = (T \cap C) \cup (T \cap \overline{C})$

D'après le théorème des probabilités totales

$p(T) = p(T \cap C) + p(T \cap \overline{C}) = 0,005 \times 0,85 + 0,995 \times 0,05.$

$p(T) = 0,054.$

Bonus

$P_T(C) = \frac{P(T \cap C)}{p(T)}$

$P_T(C) = \frac{0,005 \times 0,85}{0,054} \simeq 0,08$

(C)

Test bilatéral $H_0 : p = 0,005$ Seuil $\alpha = 5\%$.

$H_1 : p \neq 0,005.$

Sous H_0 F suit la loi normale $\mathcal{N}(0,005 ; \underset{\sigma =}{0,002})$

1) $p(0,005 - h \leq F \leq 0,005 + h) = 0,95 \Leftrightarrow$

$p(F \leq 0,005 + h) = 0,975$

Avec la calculatrice $0,005 + h \simeq 0,0089$

$h \simeq 0,0089 - 0,005$

$h \simeq 0,004$

Réponse $\boxed{C}$

2) Règle de décision.

On calcule la fréquence f_e des contrefaçons de notre échantillon de 1000 soupapes

Si $f_e \in [0{,}001\ ;\ 0{,}009]$

alors on accepte l'hypothèse H_0 au seuil de 5%

Sinon on rejette H_0, on accepte H_1 au seuil de 5%

3) $f_e = 0{,}004$ $\quad f_e \in [0{,}001\ ;\ 0{,}009]$

On accepte H_0 au seuil de 5%

On conclut qu'en 2015 la proportion de contrefaçons est de 0,5% au seuil de 5%.

D) T : Variable aléatoire qui associe sa durée de bon fonctionnement en mois.

$p(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

1) $p(T \leq 120) = 1 - e^{-0{,}01 \times 120} = 1 - e^{-1{,}2}$

$p(T \leq 120) \simeq 70\%$

2) $p(T \geq 100) = 1 - p(T \leq 100) = e^{-0{,}01 \times 100}$

$= e^{-1}$

$p(T \geq 100) \simeq 37\%$.

3) $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}01} = 100.$

E(T) correspond à la durée moyenne de bon fonctionnement (en mois).

Une soupape fonctionne correctement en moyenne 100 mois