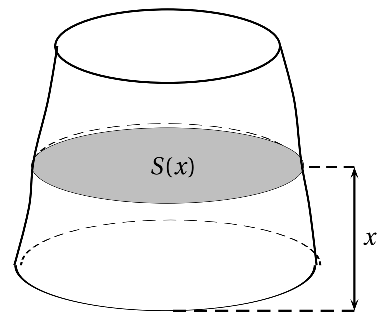
∽ Brevet de technicien supérieur Nouvelle-Calédonie ∾
session novembre 2016 - groupement B

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

Dans cet exercice on étudie des solides dont l'aire $S(x)$ de la section à la hauteur x varie en fonction de x.



A. Résolution d'une équation différentielle

Le solide étudié dans cette partie est un solide d'égale résistance, c'est-à-dire que chaque point est soumis à la même pression, quelle que soit la hauteur de la section considérée.
On note S la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ qui, à toute hauteur x, en mètres, associe l'aire en mètres carrés de la section du solide à cette hauteur.
On montre en mécanique que S est une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 2,5y = 0,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Résoudre sur $[0~;~+\infty[$ l'équation différentielle (E) :

$$y' + 2,5y = 0,$$

On fournit les formules suivantes :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(x) = k\mathrm{e}^{-ax}$

2. Déterminer la solution S de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $S(0) = 2$.

B. Étude d'une fonction

La modélisation d'un second solide, qui n'est pas d'égale résistance, conduit à l'étude de la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 2\mathrm{e}^{-2,5x},$$

où x représente la hauteur en mètres et $f(x)$ l'aire en mètres carrés de sa section à la hauteur x.
Remarque : la fonction f n'est pas une solution de l'équation différentielle (E).
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. On fournit les limites suivantes : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{t} = +\infty$; lim et $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{t} = 0$.

a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2,5x}$.

b. En déduire que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.

c. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
Recopier sur fa copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.
La réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ on peut dire que :

la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite Δ	la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite Δ sur l'intervalle $[0~;~2]$ et en dessous de la droite Δ sur l'intervalle $[2~;~+\infty[$.	la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite Δ	on ne peut pas déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.

2. a. Vérifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, on a $f'(x) = 1 - 5\mathrm{e}^{-2,5x}$.

b. Résoudre sur $[0~;~+\infty[$ l'équation $1 - 5\mathrm{e}^{-2,5x} = 0$.

c. Recopier et compléter le tableau de variation suivant. Arrondir à 10^{-3}.

x	0		$\dots$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$\dots$	$\nearrow$	$+\infty$

3. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir le développement limité de la fonction f, à l'ordre 2, au voisinage de 0.

► **Calcul formel**	×
1	PolynômeTaylor$[x + 2 * \exp(-2.5 * x), 0, 2]$ $\to 2 - 4x + \dfrac{25}{4}x^2$

Une équation de la droite T, tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$y = 2$	$y = -4x$	$y = 2 - 4x$	$y = -4x + \dfrac{25}{4}x^2$

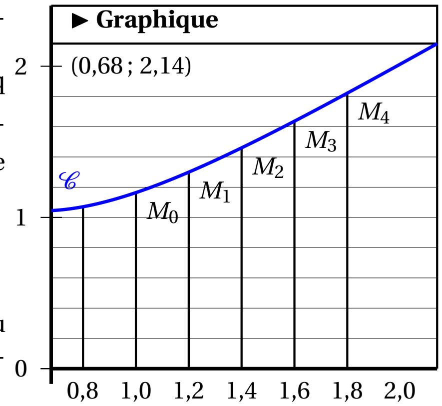
C. Calcul intégral et algorithmique

On considère à nouveau la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $f(x) = x + 2\text{e}^{-2,5x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

On décompose l'intervalle $[1~;~2]$ en cinq intervalles d'amplitude $\dfrac{1}{5}$. Pour tout entier k compris entre 0 et 4, on note M_k le point de la courbe $\mathscr{C}$ de coordonnées :

$$M_k\left(1 + \frac{k}{5}~;~f\left(1 + \frac{k}{5}\right)\right).$$



1. Calculer, en unités d'aire, l'aire du rectangle de largeur $\frac{1}{5}$ et de longueur $f(1)$.
Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3}.

4. On considère l'algorithme suivant.

Variable :	k est un entier et A un nombre réel
Initialisation :	A prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 4
	A prend la valeur $A + \dfrac{1}{5} \times f\left(1 + \dfrac{k}{5}\right)$
	Fin Pour
Affichage	Afficher A

Faire tourner cet algorithme « à la main » en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie (arrondir les valeurs approchées à 10^{-3}).

k		0	1	2	3	4
$\frac{1}{5} \times f\left(1 + \frac{k}{5}\right)$		0,233	0,260			
A	0	0,233				

5. Un logiciel de calcul formel permet d'afficher les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

2	Intégrale$[x + 2 * \exp(-2,5 * x)]$ $\rightarrow \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{4}{5}\text{e}^{-\frac{5}{2}x} + c_1$

En admettant le résultat donné par le logiciel, donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\text{d}x$.

Comparer avec le résultat affiché par l'algorithme précédent.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Une entreprise fabrique en grande quantité des blocs électroniques de lampes utilisées dans les cabines d'avions.

A. Loi binomiale, loi de Poisson et loi normale

On prélève au hasard n blocs dans le stock pour vérification. On admet que la probabilité qu'un bloc prélevé au hasard dans le stock soit défectueux est $0,02$. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement de n blocs à un tirage avec remise de n blocs.
On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement de n blocs dans ce stock associe le nombre de blocs défectueux.

1. Justifier que X suit une loi binomiale.

2. On suppose dans cette question que $n = 360$ ce qui correspond au nombre de blocs nécessaires pour équiper un avion d'un type donné.

- **a.** Calculer l'espérance $E(X)$. Interpréter le résultat.
- **b.** Calculer, à l'aide de la calculatrice, P(X = 7). Arrondir à 10^{-4}.
- **c.** Calculer la probabilité qu'au moins un bloc soit défectueux. Arrondir à 10^{-4}.

3. On suppose dans cette question que $n = 3\,960$, ce qui correspond au nombre de blocs nécessaires pour équiper une flotte de 11 avions.

On admet que la loi de X peut être approchée par la loi normale de moyenne $79,2$ et d'écart type $8,8$.

- **a.** Justifier les paramètres de cette loi normale.
- **b.** Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne $79,2$ et d'écart type $8,8$.

  Calculer $P(Z \geqslant 89,5)$.

  Interpréter ce résultat dans le contexte.

B. Loi exponentielle

On considère la variable aléatoire T qui, à tout bloc électronique prélevé au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement en heures avant défaillance.
On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,011$.
On rappelle que :

— pour tout nombre réel positif t, on a $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$;

— l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T est égale à $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

1. On prélève un bloc au hasard dans ce stock.

Calculer la probabilité que la durée de bon fonctionnement en heures avant défaillance de ce bloc soit inférieure à $35\,000$ heures. Arrondir à 10^{-3}.

2. Calculer, à l'unité près, l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

C. Intervalle de confiance

On s'intéresse dans cette partie à la qualité des lampes utilisées pour composer les blocs.
L'entreprise effectue un prélèvement dans son stock de lampes pour évaluer leur durée de vie moyenne μ, exprimée en heures, en usage intensif simulé en laboratoire.
On prélève pour cela un échantillon aléatoire de $n = 100$ lampes soumises à un usage intensif en laboratoire. Le stock de lampes est suffisamment important pour considérer que ce prélèvement résulte d'un tirage avec remise.
Soit M la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 lampes ainsi prélevées associe la durée de vie moyenne en usage intensif des lampes de cet échantillon. On

suppose que M suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$, où σ est l'écart type inconnu de la durée de vie en usage intensif des lampes du stock.
Pour l'échantillon de 100 lampes soumises à un usage intensif en laboratoire, la moyenne des durées de vie obtenue est $\overline{x} = 288$ heures et l'écart type est $\sigma_{\text{e}} = 168$ heures.

1. Donner une estimation ponctuelle s de l'écart type σ. (Arrondir à l'unité).

On rappelle la formule $s = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}\sigma_{\text{e}}$.

2. **a.** Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la durée de vie moyenne en usage intensif μ des lampes du stock au niveau de confiance de 95 %. (On arrondira les bornes de l'intervalle à l'unité.)

On rappelle une formule fournissant un tel intervalle de confiance :

$$\left[\overline{x} - 1,96\frac{s}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{x} + 1,96\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

b. Est-on certain que la moyenne μ appartienne à cet intervalle de confiance ?