∽ Brevet de technicien supérieur Nouvelle-Calédonie ∾ session 2013 - groupement B

Exercice 1 **12 points**

On étudie le mouvement d'une masse fixée à l'extrémité d'un ressort soumis à un mouvement fluide, dans le cas d'un mouvement entretenu.
On considère, dans le repère indiqué sur la figure 1, l'allongement horizontal $y(x)$ du ressort en fonction du temps x.

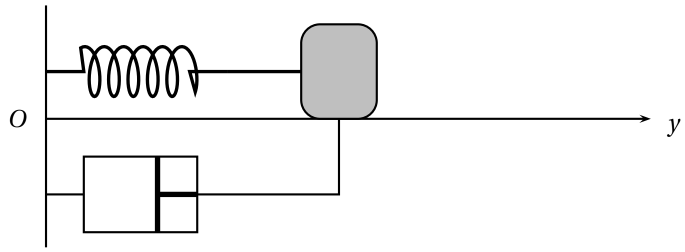

FIGURE 1 –

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

L'étude du système mécanique conduit à considérer l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}, \qquad \text{(E)}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $r^2 + 3r + 2 = 0$.

   b. En déduire les solutions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle (E') :

   $$y'' + 3y' + 2y = 0, \qquad \text{(E')}$$

2. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = -x\mathrm{e}^{-2x}$. Un logiciel de calcul formel fournit l'expression de la dérivée et de la dérivée seconde sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ de g sous la forme $g'(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-2x}$ et $g''(x) = (4-4x)\mathrm{e}^{-2x}$.
   Ces résultats sont admis et ne sont donc pas à démontrer.
   Montrer que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 0,5$ et $f'(0) = -2$.

Partie B : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$, par $f(x) = (0,5-x)\mathrm{e}^{-2x}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-2x} = 0$.

   a. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote dont on donnera une équation.

2. a. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*
On note f' la dérivée de la fonction f. Une expression de $f'(x)$ est :

$$f'(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-2x}\,; \qquad f'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^{-2x}\,; \qquad f'(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{-2x}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
c. En déduire que f admet un minimum sur $[0\,;\,+\infty[$.

a. À l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction : $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$.
b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 0,5 - 2x + 3x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

c. En déduire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
d. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification. La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*
On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite $\mathcal{T}$. Recopier sur votre copie la justification qui vous paraît exacte.
$0,5 - 2x$ est positif au voisinage de 0 ;
$x^2\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0 ;
$3x^2$ est positif au voisinage de 0 ;

PartieCalcul intégral

On admet qu'une primitive sur $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction h définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ est la fonction H définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $H(x) = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}$.
Ce résultat n'est pas à démontrer.

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{0,5} \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.
2. On pose $J = \displaystyle\int_0^{0,5} f(x)\,\mathrm{d}x$ où $f(x) = (0,5 - x)\mathrm{e}^{-2x}$.
   a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}I$.
   b. Donner la valeur approchée de J arrondie à 10^{-2}.

Exercice 2 **8 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans une entreprise, deux automates programmables industriels commandent deux machines m_1 et m_2 qui produisent des boulons.

A. Probabilités conditionnelles

La machine m_1 produit 40 % des boulons de l'entreprise dont 2 % de boulons défectueux. La machine m_2 produit 60 % des boulons de l'entreprise dont 3 % de boulons défectueux.

On prélève au hasard un boulon dans la production d'une journée. Tous les boulons ont la même probabilité d'être tirés.
On considère les évènements suivants :

M_1 **:** « le boulon prélevé est produit par la machine m_1 ».

M_2 **:** « le boulon prélevé est produit par la machine m_2 ».

D **:** « le boulon prélevé est défectueux ».

1. Déterminer les probabilités $P(M_1)$, $P(M_2)$, $P_{M_1}(D)$ et $P_{M_2}(D)$.
(On rappelle que $P_{m_1}(D)$ est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement M_1 est réalisé.)

2. Calculer $P(M \cap D)$ et $P(M_2 \cap D)$.

3. En déduire que $P(D) = 0,026$.

4. Calculer la probabilité $P_D(M_1)$ que le boulon prélevé provienne de la machine M_1 sachant qu'il est défectueux. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2}.
Dans la suite de l'exercice les résultats approchés seront arrondis à 10^{-2}.

B. Loi binomiale et loi de Poisson

On prélève au hasard 50 boulons dans un stock de I'entreprise. On considère que ce stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 boulons. On suppose que la probabilité qu'un boulon prélevé au hasard dans ce stock soit défectueux est 0,03. On note X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de boulons défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. **a.** Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun boulon ne soit défectueux.

b. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux boulons soient défectueux.

3. On considère que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson.

a. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b. On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, oÙ λ est la valeur obtenue au a). Calculer $P(Y \leqslant 2)$.

C. Test d'hypothèse

On se propose de construire un test d'hypothèse pour contrôler la moyenne p inconnue des diamètres, exprimés en millimètres, des boulons produits par la machine m_1 durant une journée.
On désigne par $\bar{D}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 50 boulons prélevés au hasard dans la production d'une journée de la machine m_1, associe la moyenne des diamètres de ces boulons (la production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 10$. Dans ce cas, on considère que la machine m_1 est bien réglée.
L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 10$.
Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0, on admet que la variable aléatoire $\overline{D}$ suit la loi normale de moyenne 10 et d'écart type 0,16.
Déterminer, en utilisant cette loi normale, le nombre réel h positif tel que : $P(10 - h \leqslant \overline{D} \leqslant 10 + h) = 0,95$.

2. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
3. On prélève un échantillon aléatoire de 50 boulons dans la production d'une journée de la machine m_1 et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres des boulons est $\bar{d} = 10,2$.

   Peut-on, au seuil de 5 % conclure que la machine m_1 est bien réglée ?