PROPOSITION DE CORRIGÉ
du sujet 2014 du BTS. Groupement B

Exercice 1

A. Equation différentielle

1) a) $r^2+2r+1=0$

* soit on voit que $r^2+2r+1=(r+1)^2=0 \Rightarrow \boxed{r=-1}$

* soit on calcule $\Delta = 2^2-4\times1\times1=0$

donc solution unique $r=-\frac{2}{2\times1}=-1 \Rightarrow \boxed{r=-1}$

b) D'après le formulaire, on sait que :

$$\boxed{y=(Ax+B)e^{-x}}$$

2) Pour vérifier quelle fonction est solution de (E), on essaie en remplaçant y par g dans (E), puis par h et par k et on va voir laquelle donnera $2e^{-x}$ comme résultat.

1er essai avec $g(x)$:

$$g''(x)+2g'(x)+g(x)=2e^{-x}+2(-2e^{-x})+2e^{-x}=4e^{-x}-4e^{-x}=0$$

$\Rightarrow$ $g(x)$ n'est pas solution de (E)

2e essai avec $h(x)$:

$$h''(x)+2h'(x)+h(x)=(x^2-4x+2)e^{-x}+2(2x-x^2)e^{-x}+x^2e^{-x}$$
$$=(\cancel{x^2}-\cancel{4x}+2+\cancel{4x}-\cancel{2x^2}+\cancel{x^2})e^{-x}$$
$$=2e^{-x}$$

donc $\boxed{h(x) \text{ est bien une solution particulière de (E)}}$

(Pour information,
$k''+2k'+k=0$, donc $k(x)$ n'est pas solution particulière de (E))

③ Les solutions de (E) sont :

$$\boxed{y(x) = (Ax+B)e^{-x} + x^2 e^{-x}}$$

④ . $f(0) = (A \times 0 + B)e^{-0} + 0^2 e^{-0} = B = -1$

. Pour exploiter $f'(0) = 1$, il faut d'abord calculer $f'(x)$, puis ensuite remplacer x par 0 dans $f'(x)$:

* $f'(x) = Ae^{-x} + (Ax+B)(-e^{-x})$

* $f'(0) = A - B = 1$

$\Rightarrow A = 1 + B = 1 - 1 = 0 \Rightarrow A = 0$

donc $\boxed{f(x) = -e^{-x} + x^2 e^{-x} = (x^2-1)e^{-x}}$

B. <u>Etude d'une fonction</u>

① a) $f(x) = (x^2-1)e^{-x}$.

On calcule la dérivée (avec la formule $(uv)' = u'v + uv'$).

donc $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + (x^2-1)(-e^{-x})$

$= [2x - (x^2-1)]e^{-x}$

$\Rightarrow \boxed{f'(x) = -(x^2-2x-1)e^{-x}}$

b) Au point d'abscisse 0, on a donc $a = 0$.

On en déduit que l'équation de la tangente est :

$y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$.

On calcule . $f'(0) = -(0^2 - 2 \times 0 - 1)e^{-0} = 1$

. $f(0) = (0^2-1)e^{-0} = -1$

donc $y = 1 \times x - 1$

$\Rightarrow \boxed{y = x - 1}$ est l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

2 a) On sait $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x)$

donc on en déduit que : $e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

$\Rightarrow \boxed{e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}$

b) $f(x) = (x^2-1)e^{-x}$

$= (x^2-1)\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x)$

$= x^2 - 1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ puisqu'on ne garde que les x à la puissance ≤ 2

$\Rightarrow \boxed{f(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}$

c) $\boxed{\frac{x^2}{2} \text{ est positif au voisinage de } 0}$.

C. Calcul intégral

1 a) Pour vérifier que la fonction donnée est bien une primitive de $f(x)$, il faut montrer que sa dérivée est égale à f

$\left(-(x+1)^2e^{-x}\right)' = -\left[2(x+1)e^{-x} + (x+1)^2(-e^{-x})\right]$

$= -e^{-x}\left(2x+2-(x^2+2x+1)\right)$

$= -e^{-x}\left(\cancel{2x}+2-x^2-\cancel{2x}-1\right)$

$= -(-x^2+1)e^{-x} = (x^2-1)e^{-x} = f(x)$

donc $\boxed{-(x+1)^2e^{-x} \text{ est bien une primitive de } f}$.

b) $I = \int_1^3 f(x)\,dx = \left[-(x+1)^2e^{-x}\right]_1^3$

$= -(16e^{-3} - 4e^{-1})$

$\Rightarrow \boxed{I = 4e^{-1} - 16e^{-3}}$.

2 $\boxed{\text{1ère réponse}}$, en unités d'aires, entre les axes $x=1$ et $x=3$.

EXERCICE 2

A. Evénements indépendants

1) $P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ car les événements sont indépendants.
$= 0{,}02 \times 0{,}085$

$\Rightarrow P(E_1) = \underline{1{,}7 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \boxed{P(E_1) = 0{,}002}$

2) $P(E_2) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}02 + 0{,}085 - 1{,}7 \cdot 10^{-3}$
$= 0{,}1033 \Rightarrow \boxed{P(E_2) = 0{,}103}$

B. Loi binomiale et loi de Poisson

1) Vérifions les 3 conditions :
① On répète 53 fois la même épreuve
② Chaque épreuve peut déboucher sur 2 résultats :
- un octet contient une erreur, événement de probabilité $p = 0{,}03$
- un octet ne contient pas d'erreur, événement de probabilité $q = 1 - p = 0{,}97$.

③ les 53 épreuves sont indépendantes car assimilées à un tirage avec remise.

$\boxed{\text{La variable aléatoire } X \text{ suit donc la loi binomiale } \mathcal{B}(53\,;0{,}03)}$

2) $P(X=0) = C_{53}^{0} \cdot 0{,}03^0 \times 0{,}97^{53-0} = 0{,}199$

3) $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$
$= 0{,}199 + 0{,}3262 + 0{,}2623 + 0{,}1379$
$= 0{,}9254 \Rightarrow \boxed{P(X \leq 3) = 0{,}926}$

4) On sait que $\lambda = n \times p = 53 \times 0{,}03 = 1{,}59$ $\boxed{\lambda = 1{,}59}$

5) a) $P(Y=0) = \dfrac{e^{-1{,}59} \times 1{,}59^0}{0!} = 0{,}204$

b) $P(Y \leq 3) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3)$
$= 0{,}2039 + \dfrac{e^{-1{,}59} \cdot 1{,}59^1}{1!} + \dfrac{e^{-1{,}59} \times 1{,}59^2}{2!} + \dfrac{e^{-1{,}59} \times 1{,}59^3}{3!}$
$= 0{,}2039 + 0{,}3242 + 0{,}2577 + 0{,}1366$
$= 0{,}9224 \Rightarrow \boxed{P(Y \leq 3) = 0{,}922}$

C. Intervalle de confiance

1. $p = p_e = \frac{4}{100} = 0,04$. $\boxed{p = 0,04}$

2. a) $I = \left[p - t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_e - 1}} \; ; \; p + t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_e - 1}} \right]$

avec * $p = 0,04$

* $t = 1,96$ car on est à 95%

donc $P(-t \leq T \leq t) = 0,95$

$\Rightarrow 2P(T \leq t) - 1 = 0,95$

$\Rightarrow P(T \leq t) = \frac{1,95}{2} = 0,975$

ce qui correspond à $t = 1,96$ par lecture inverse de la table de la loi normale.

* $n_e = 100$

On obtient donc : $\boxed{I = [0,001 \; ; \; 0,079]}$.

b) Non car il y a 5% de chances que la fréquence n'appartienne pas à I.