Chapitre 2 : A1 : divisibilité et nombres premiers

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

Définition 1. .
Dire que b divise a signifie qu'il existe un entier relatif k tel que $a = bk$.
On note : $b|a$.
On dit aussi que b est un diviseur de a ou que a est un multiple de b.

Exercice 1. .

1) Montrer que -8 est un diviseur de 24.
2) Montrer que 24 est un multiple de 8.
3) Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $n-1$ est un diviseur de $n^2 - 1$.
4) Montrer que 1 et -1 divisent tous les entiers relatifs.
5) Montrer que tout entier relatif divise 0.

Proposition 1. .
Les seuls diviseurs de 1 et -1 sont 1 et -1.

Proposition 2. .

1) *Transitivité : Si $c|b$ et $b|a$ alors $c|a$.*
2) *Si $a|b$ et $b|a$ alors $|a| = |b|$.*
3) *Si c divise a et b alors, pour tout entier u et v, c divise $au + bv$.*

Exercice 2. .
Démontrer chacun des points de la propriété précédente :

1) Transitivité : Si $c|b$ et $b|a$ alors $c|a$.
2) Si $a|b$ et $b|a$ alors $|a| = |b|$.
3) Si c divise a et b alors, pour tout entier u et v, c divise $au + bv$.

Définition 2. .
On dit que qu'une fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si les seuls diviseurs communs à a et à b sont 1 et -1.

2 Nombres premiers

Définition 3. .
Un entier est dit premier lorsqu'il admet exactement deux diviseurs dans $\mathbb{N}$: 1 et lui-même.

Proposition 3. .
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
n est premier si, et seulement si, n n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ autre que 1.

Exercice 3. .
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1) On suppose que n est premier. Justifier que 1 est le seul diviseur de n inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
   En déduire que n n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
2) Réciproquement, supposons que n n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ et montrons, en raisonnant par l'absurde, que n est premier : on suppose donc que n n'est pas premier.
   L'ensemble des diviseurs de n (dans $\mathbb{N}$) autres que 1 et n étant non vide, il admet un plus petit élément m.
   (a) Justifier que m est premier.
   (b) Justifier qu'il existe un entier k tel que $1 < m \leqslant k < n$ et $n = mk$.
   (c) En déduire que $m^2 \leqslant n$.
3) Conclure.