Chapitre 3 : C3 : Nombres complexes : formes exponentielles et trigonométriques

1 Demander le programme

Contenus

- Formules d'addition et de duplication à partir du produit scalaire.
- Exponentielle imaginaire, notation $e^{i\theta}$. Relation fonctionnelle. Forme exponentielle d'un nombre complexe.
- Formules d'Euler : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$, $\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$.
- Formule de Moivre : $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.

Capacités attendues

- Passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à sa forme trigonométrique ou exponentielle et inversement.
- Effectuer des calculs sur des nombres complexes en choisissant une forme adaptée, en particulier dans le cadre de la résolution de problèmes.
- Utiliser les formules d'Euler et de Moivre pour transformer des expressions trigonométriques, dans des contextes divers (intégration, suites, etc.), calculer des puissances de nombres complexes.

Démonstration

- Démonstration d'une des formules d'addition.

2 Formule d'addition et de duplication

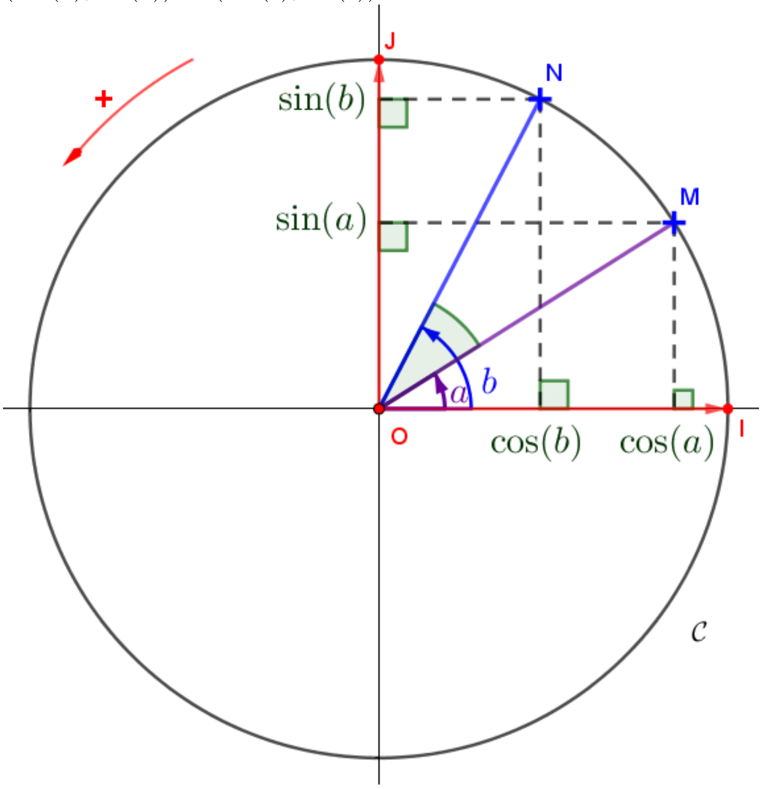
2.1 Formule d'addition

***Proposition* 1.**
Pour tout réel a et b, on a :

- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

Exercice 1.

1) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.
On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O.
a et b sont deux nombres réels ; M et N sont deux points du cercle $\mathcal{C}$ de coordonnées respectives $(\cos(a); \sin(a))$ et $(\cos(b); \sin(b))$.



(a) Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ en faisant le lien avec $\widehat{MON}$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = OM \times ON \times \cos(\widehat{MON})$

(b) Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ en fonction des coordonnées des points M et N.

(c) En déduire la première formule de la propriété.

2) Remplacer b par $-b$: Qu'obtenez-vous ?

3) (a) Démontrer que $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

(b) En déduire que $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

(c) En déduire la troisième égalité de la propriété.

4) Démontrer la dernière égalité

Exercice 2.

1) En remarquant que $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$, donner la valeur exacte de $\cos(\frac{7\pi}{12})$.

2) En remarquant que $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$, donner la valeur exacte de $\sin(-\frac{\pi}{12})$.

Exercice 3.
Simplifier l'expression de $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

2.2 Formule de duplication

***Proposition* 2.**
Pour tout réel a, on a :

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
- $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$
- $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

***Exercice* 4.**

1) En remarquant que $2a = a + a$, démontrer la première égalité.

2) (a) Rappeler ce que vaut $\cos^2(a) + \sin^2(a)$.

   (b) En déduire les deuxième et troisième formule de la propriété.

3) Démontrer la dernière formule du cours.

***Remarques* 1.**
On peut retourner les formules précédentes afin d'obtenir les formules de linéarisation :

- $\cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$

***Exercice* 5.**

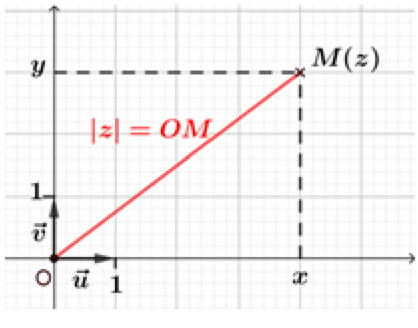
En utilisant un lien entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{8}$, déterminer la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{8})$.

3 Propriétés de l'argument

Dans tout ce cours, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0; \vec{u}, \vec{v})$.

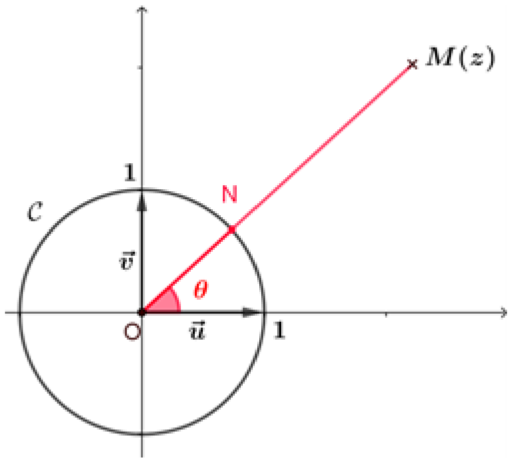
3.1 Rappels

Les éléments de cours rappelés dans cette partie sont issus du cours C2.



***Définition* 1.**
Soit M le point d'affixe z. Le module de z, noté $|z|$, est la distance OM, c'est-à-dire $|z| = OM$.

Définition 2.
Soit z un nombre complexe non nul de point image M du plan complexe, N est le point d'intersection du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et de la demi-droite $[OM)$.
On appelle <u>argument</u> de z et on note <u>arg(z)</u> tout nombre θ dont le point N est l'image sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.



Proposition 3.

1) $z = x + iy$ *est un nombre complexe.*

   $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2) *Pour tout nombre complexe z et z' :*

   $|zz'| = |z| \times |z'|$

3) *Pour tout nombre complexe z et z', z' étant non nul :*
   $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Proposition 4.
Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $x + iy$ (x et y réels).
Alors un argument de z est un réel θ tel que

$$\begin{cases} \cos(\theta) = & \dfrac{x}{|z|} \\ \sin(\theta) = & \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$

Définition 3.
$z = x + iy$ est un nombre complexe non nul.

L'écriture $z = |z|(cos(\theta) + isin(\theta))$ où $arg(z) = \theta(2\pi)$ est appelée une <u>forme trigonométrique</u> de z.

3.2 Propriétés de l'argument

Théorème 1.
Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

$$arg(zz') = arg(z) + arg(z')\ [2\pi]$$

Exercice 6.

1) En posant $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $z' = r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$, mettre sous forme trigonométrique le produit zz'.
2) Finir de démontrer le théorème précédent.

***Proposition* 5.**
Pour tout nombre complexe z et z', z' étant non nul et tout entier naturel $n \geq 1$:

1) $arg(\frac{1}{z}) = -arg(z)\ [2\pi]$
2) $arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')\ [2\pi]$.
3) $arg(z^n) = n \times arg(z)\ [2\pi]$

***Exercice* 7.**

1) À partir de l'égalité $z \times \frac{1}{z} = 1$, démontrer que $arg(\frac{1}{z}) = -arg(z)\ [2\pi]$.
2) Démontrer que $arg(\frac{z}{z'}) = arg(z) - arg(z')\ [2\pi]$.
   Aide : Penser à adapter une démarche qui vous a permis de démontrer un résultat proche.
3) Quel raisonnement permet de démontrer que, pour entier naturel n non nul : $arg(z^n) = n \times arg(z)\ [2\pi]$?

***Exercice* 8.**
Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants :

1) $z_1 = -1 + i$
2) $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$
3) $(-1 + i)(1 - i\sqrt{3})$
4) $\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}$

4 Forme exponentielle

4.1 fonction $\theta \mapsto \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

***Proposition* 6.**
Pour tous les réels θ et θ', $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$.

***Exercice* 9.**
Démontrer cette propriété.

***Proposition* 7.**

1) *On admet que que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(\theta) = \cos'(\theta) + i \times (\sin)'(\theta)$.*

2) *Pour tout réel θ, $f'(\theta) = i \times f(\theta)$.*

***Exercice* 10.**
Démontrer la deuxième propriété ci-dessus : pour tout réel θ, $f'(\theta) = i \times f(\theta)$.

On vient de voir que :

- la fonction f vérifie une relation fonctionnelle identique à celle de la fonction exponentielle : $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$

- la fonction f vérifie une équation différentielle $f'(\theta) = i \times f(\theta)$.
  Or, les fonctions $g : x \mapsto e^{kx}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = k \times g(x)$ donc les fonctions g vérifient l'équation différentielle $g'(x) = k \times g(x)$.

Ces analogies avec la fonction exponentielle conduisent à adopter l'écriture suivante :

***Proposition* 8.**
Pour tout réel θ, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Un peu d'histoire
Cette notation est due à Euler qui l'a développée en 1748.

***Exercice* 11.**
Justifier que $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Un peu d'histoire

Cette égalité a été trouvée par Euler. Il trouvait cette égalité très élégante car elle lie les nombres fondamentaux en mathématiques : 0 et 1 (les bases de l'arithmétique), π (base du cercle et donc de la géométrie) et e (élément essentiel de l'analyse) ainsi que les deux symboles essentiels de l'algèbre + et =.

4.2 Forme exponentielle

***Définition* 4.**
Tout nombre complexe de module, non nul, r et d'argument θ, s'écrit $z = re^{i\theta}$.
Cette écriture est <u>la forme exponentielle</u> de z.

***Exercice* 12.** On donne $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1) Déterminer la forme exponentielle de z_1.

2) Déterminer la forme exponentielle de z_2.

5 Propriétés de $e^{i\theta}$

5.1 Module et argument de $e^{i\theta}$

***Proposition* 9.**

- *Pour tout θ réel,* $\left|e^{i\theta}\right| = 1$.
- *Pour tout θ réel,* $\arg\left(e^{i\theta}\right) = \theta\ [2\pi]$.

***Exercice* 13.**
Démontrer que pour tout θ réel, $\left|e^{i\theta}\right| = 1$.

***Exercice* 14.**
Dans le plan complexe, placer les points A, B, C, D d'affixes respectives $e^{i\times 0}$, $e^{i\times\frac{\pi}{2}}$, $e^{-i\times\frac{\pi}{4}}$ et $e^{i\times\frac{2\pi}{3}}$.

***Proposition* 10.**
Pour tout θ , θ' réels, $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si, et seulement si, $\theta = \theta'\ [2\pi]$.

Démonstration.
Cette équivalence provient du fait que deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont le même module et le même argument modulo 2π. □

5.2 Propriétés algébriques

***Proposition* 11.**

1) *Pour tout* θ , θ' *réels,* $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$.

2) *Pour tout* θ , $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

3) *Pour tout* θ , θ' *réels,* $e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$.

4) *Pour tout* θ , $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

***Exercice* 15.**

1) Démontrer que pour tout θ , $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

2) Démontrer que pour tout θ , θ' réels, $e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$.

3) Démontrer que pour tout θ réel, $\overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{-i\theta}}$.

***Remarques* 2.**
Les règles de calculs avec l'exponentielle complexe sont analogues à celles des règles avec les puissances : exponentielle $i\theta$=e puissance i θ.

***Proposition* 12.**
Formule de Moivre
Pour tout θ *réel et tout entier naturel* n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.
Réécriture :
Pour tout θ *réel et tout entier naturel* n, $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Un peu d'histoire
Cette formule a été démontrée en 1707 sous sa forme trigonométrique par Abraham de Moivre.
Ce mathématicien est né à Vitry-Le-François en 1667. À l'issue de la révocation de l'édit de Nantes, Abraham de Moivre, étant comme sa famille protestant, fut emprisonné pendant plus de deux ans. Une fois libéré, il s'exila en Angleterre où sa fréquentation avec les grands savants anglais de l'époque lui permit de devenir un des mathématiciens les plus renommés de son époque. C'est en Angleterre qu'il publia ses oeuvres.
Cet exemple montre bien que l'intolérance, quelle soit religieuse ou autre, conduit à une perte énorme pour une Nation.

***Remarques* 3.**
La formule d'Abraham de Moivre permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$, en s'aidant du binôme de Newton.

***Exercice* 16.**
Démontre que pour tout θ réel et tout entier naturel n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Plus généralement :

***Proposition* 13.**
Pour tous réels $r > 0$ *et* $r' > 0$, θ *et* θ' , *on a :*

1) $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$.
2) $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta} = \frac{r}{e^{i\theta}}$.

3) $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$.
4) $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

***Exercice* 17.**
On donne $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1) Déterminer la forme exponentielle de $z_1 \times z_2$.

2) Déterminer la forme exponentielle de $\frac{z_1}{z_2}$.

3) Déterminer la forme exponentielle de z_1^{12}.

5.3 Formules d'Euler

***Proposition* 14.**
Pour tout θ réel, $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ *et* $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

***Exercice* 18.**

1) Écrire $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sous forme trigonométrique

2) En déduire les formule d'Euler.

***Exercice* 19.**
linéarisation de $\cos(3x)\sin(2x)$
Aide : Utiliser les formules d'Euler.

6 Exercices

6.1 Formules de trigonométrie

***Exercice* 20.**

1) Simplifier $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$.
2) Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
3) Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
4) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right)$.
5) Quelle est la valeur exacte de $\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)$?

***Exercice* 21.**
Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$ l'expression $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

***Exercice* 22.**
Démonter que pour tout réel x : $\sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

Exercice 23.
Soit x un nombre réel strictement compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et $\cos(x) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

1) Calculer $\cos(2x)$.

2) En déduire la valeur exacte de x.

6.2 Calculer avec la forme exponentielle

Exercice 24.
Écrire sous forme exponentielle les complexes suivants :

1) $2\sqrt{3} - 2i$
2) $(2-2i)(3+i\sqrt{3})$
3) $-2i(\cos(\frac{\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{5}))$
4) $(2-2i)(1+i)$
5) $2i(\sqrt{2}+i\sqrt{6})$

Exercice 25.
Donnez le module et l'argument de chacun des nombres suivants :

1) $\sqrt{2}e^{2i\theta}$
2) $-e^{-i\theta}$
3) $-2e^{i\theta}$

Exercice 26.
Soient les deux nombres complexes : $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}\mathrm{i}$.
On pose :$Z = \frac{z_1}{z_2}$.

1) Donner la forme algébrique de Z.

2) Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

3) Écrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.

4) En déduire que la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

5) En déduire la résolution de l'équation suivante dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$: $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x - \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x = -2\sqrt{3}$

Exercice 27.
On pose $z_1 = -3e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2 - 2i$.

1) Donnez la forme algébrique de z_1 et de z_1z_2.

2) Écrivez z_1, z_2 et z_1z_2 sous forme exponentielle, puis sous forme trigonométrique.

3) Déduisez-en la valeur exacte de : $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 28.
On pose $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
Donnez une forme exponentielle des complexes suivants :

1) $z_1 z_2$
2) $\frac{z_1}{z_2}$
3) z_1^3
4) $z_1 z_2 z_3$
5) z_3^4
6) $\frac{z_2}{z_3}$

Exercice 29.
Donnez une forme exponentielle de chacun des complexes suivants :

1) $z_1 = -2e^{i\frac{\pi}{3}}$
2) $z_2 = (1-i)e^{-i\frac{\pi}{6}}$
3) $z_3 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}$
4) $z_4 = \frac{3}{e^{i\frac{\pi}{7}}}$

Exercice 30.
(z_n) est la suite définie par $z_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $z_{n+1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + i\right) z_n$.

1) Écrire $-\frac{\sqrt{3}}{3} + i$ sous forme exponentielle.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n : $z_n = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^n e^{\frac{2in\pi}{3}}$.

3) On pose pour tout entier naturel n $d_n = |z_n|$.
Démontrer que la suite (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4) En déduire la valeur exacte de la somme $S = d_0 + d_1 + ... + d_{19}$.

Exercice 31.
Soit x un nombre réel.

1) Développer $(\cos(x) + i\sin(x))^3$.

2) En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\cos(3x) + i\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

3) Démontrer que :

- $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

- $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$.

Exercice **32.**

1) (a) Développer $(a+b)^4$, où a et b sont deux nombres complexes quelconques.

   (b) À l'aide d'une formule d'Euler, démontrer que $\cos^4(x) = \dfrac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right)$.

   (c) En déduire la valeur de $\cos^4\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

2) (a) Soit x un réel quelconque. Exprimer $\sin^4(x)$ en fonction de $\cos(2x)$ et de $\cos(4x)$.

   (b) En déduire la valeur de $\sin^4\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

6.3 Synthèse

Exercice **33.**
Les points A et B ont pour affixes respectives $a = 2$ et $b = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
I est le milieu de $[AB]$.

1) Faire une figure.

2) (a) Trouver une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OI})$.

   (b) Déterminer la forme algébrique de l'affixe de I.

   (c) En déduire que $OI = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

3) (a) Donner l'affixe de I sous forme exponentielle.

   (b) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$
   .

Exercice **34.**
Soit x un nombre réel.

1) En écrivant $3x = 2x + x$, démontrer que $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

2) En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$ est solution de l'équation $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$.

3) Démonter que cette équation admet exactement trois solutions réelles.

4) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$.

Exercice **35.**

1) Donner les formes exponentielle et trigonométrique des nombres complexes $1+i$ et $1-i$.

2) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = (1+i)^n + (1-i)^n$.

   (a) Déterminer une expression simplifiée de S_n suivant les valeurs de n.

   (b) Pour chacune des deux affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
   Affirmation A : Pour tout entier naturel n, le nombre complexe S_n est un nombre réel.
   Affirmation B : Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$.

***Exercice* 36.**
On considère la suite géométrique (z_n) de premier terme $z_0 = 1$ et de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.
On souhaite étudier la somme S_n des $n+1$ premiers termes de cette suite (z_n).

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} q^k$$

Partie A : utilisation de programmes en langage Python pour conjecturer un résultat

1) Compléter la fonction suivante afin qu'elle prenne en paramètre un entier n correspond au rang du terme de la suite additionné et qui renvoie la somme S des $n+1$ premiers termes de cette suite (z_n).

```
from math import sqrt
def somme_termes(n):
    q = complex(sqrt(3)/2,1/2)
    ... = ...
    ... = ...
    for ........................
        ...
        ...
    return S
```

2) Tester la fonction pour $n = 1$, $n = 10$, puis pour $n = 11$.
3) En négligeant les erreurs d'arrondi, que remarquez-vous ? Que pouvez-vous conjecturez quant à la suite (S_n) ?
4) En vous aidant de la fonction **somme_termes** , créer une fonction **liste_somme** qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite (S_n).
5) Utiliser cette fonction **somme_termes** pour tester expérimentalement la conjecture émise précédemment.

Partie B : calcul direct de la somme

1) Écrire q sous forme exponentielle.
2) En déduire l'expression de S_n en fonction de n.
3) En déduire une preuve (ou une invalidation) de la conjecture émise.

***Exercice* 37.**
Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $(\sqrt{3}+1)^n = (1 - i\sqrt{3})^n$.

Exercice 38.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

On pose $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = \dfrac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}z_n$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1) (a) Vérifier que : $\dfrac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

(b) En déduire l'écriture de chacun des nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sous forme exponentielle et vérifier que z_3 est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire.

(c) Représenter graphiquement les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 ; on prendra pour unité le centimètre.

2) (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $z_n = 8\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.

(b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$

Déterminer la nature et la limite de la suite (u_n).

3) (a) Démontrer que, pour tout entier naturel k, $\dfrac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $A_kA_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{O}A_{k+1}$.

(c) Pour tout entier naturel n, on appelle ℓ_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points A_0, A_1, A_2, …, A_n.

On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

Démontrer que la suite (l_n) est convergente et calculer sa limite.

4) (a) Soit n un entier naturel. On souhaite représenter graphiquement la ligne brisée reliant les points A_0 à A_n. Pour cela : à l'aide d'un programme où l'utilisateur choisira la valeur entière de n.

- On crée une fonction **ligne_brisee** qui prend en paramètre un entier naturel n.
- On stocke dans deux listes **lx** et **ly** la liste des abscisses (respectivement des ordonnées) des points définissant la ligne brisée. La fonction **ligne_brisee** complète progressivement ces deux listes et les renvoie.
- Enfin, la ligne brisée est représentée.

Voici ce programme incomplet en langage Python :

```
from math import sqrt, cos, sin, pi
import matplotlib.pyplot as plt   # bibliothèque permettant d'obtenir une représentation graphique

def ligne_brisee(n):
    # prise en compte de A0
    lx = [8]
    ly = [0]
    for k .........................
        # calcul des coordonnées de Ak
        x = ...
        y = ...
        # modification des listes lx et ly
        ...
        ...
    return ...

liste_x,liste_y = ...                  # détermination de la liste des coordonnées des points de la ligne brisée

plt.axis([-4,8, -4, 6])                # limitation de la fenêtre de vision
plt.title('ligne brisée')      # titre
plt.axis('equal')                      # Pour avoir un repère orthonormé
plt.grid()                             # affichage d'une grille
plt.scatter(liste_x,liste_y)           # affichage des points trouvés
plt.show()                             # réalisation du visuel dans une fenêtre graphique extérieure
```

Compléter ce programme.

(b) Le tester avec $n = 24$

(c) Modifier le programme pour qu'il affiche en plus la longueur de la ligne brisée.

Exercice 39.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

1) Démontrer que $S_n = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

2) En déduire la limite de la suite (S_n).