Nombre dérivé et limites

Exercice 1

Première approche de la notion de limite et de convergence :
Pour une valeur *(terme d'une suite ou image par une fonction)* assujetti à la variation d'un paramètre *(rang du terme ou variation de la variable)* lorsque celle-ci se "*stabilise*" vers une valeur, on parle alors de **convergence**.
Dans le cas d'une convergence, on parlera de *valeur* ***limite***

1. a. Saisir le code suivant dans votre éditeur Python :

```
x=1;
for i in range(1,10):
    x=x/10
    y=(x*x+x)/(2*x*x+3*x)
    print(x,"\t",y)
```

b. Après l'exécution de ce code et en analysant l'affichage de la console, répondre aux questions suivantes :

- Les valeurs successives prises par la variable `x` semble se stabiliser vers quelles vleurs?
- Même question, pour les valeurs successives de la variable `y`?

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=\frac{x^2+x}{2{\cdot}x^2+3{\cdot}x}$$

Le tableau de valeurs, ci-contre, de la fonction f présente des valeurs de x se *stabilisant* vers 0, on remarque que leurs images convergent vers $\frac{1}{3}$.

x	$f(x)$
1	0,4
0,1	0,34375
0,01	0,33343708...
0,001	0,33334444...
0,0001	0,33333444...
0,00001	0,33333334...

On peut conjecturer que "*la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 a pour valeur $\frac{1}{3}$*" et on note : $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\frac{1}{3}$

2. A l'aide du programme précédent, conjecturer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{x+1}{x+2}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{1+x}{x}$ c. $\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{3x^2+x}{x^2}$

Correction 1

1. b. Voici l'affichage du programme dans la console :

```
0.1   0.34375
0.01   0.3344370860927152
0.001   0.3334443704197202
0.0001   0.33334444370375305
1e-05   0.3333344444370371
1.0000000000000002e-06   0.33333344444437035
1.0000000000000002e-07   0.3333333444444436
1.0000000000000002e-08   0.3333333344444445
1.0000000000000003e-09   0.33333333344444444
```

- Les valeurs successives prises par la variable `x` semblent se stabiliser vers la valeur 0
- Les valeurs successives de la variable `y` semblent converger vers $\frac{1}{3}$

2. Effectuons le même travail avec les limites suivantes :

a. Pour répondre à cette question, on utilisera le programme ci-dessous :

```
x=1;
for i in range(1,10):
    x=x/10
    y=(x+1)/(x+2)
    print(x,"\t",y)
```

On obtient l'affichage en console :

```
0.1   0.5238095238095238
0.01   0.5024875621890548
0.001   0.5002498750624688
0.0001   0.5000249987500625
1e-05   0.5000024999875001
1.0000000000000002e-06   0.5000002499998749
1.0000000000000002e-07   0.5000000249999988
1.0000000000000002e-08   0.5000000025
1.0000000000000003e-09   0.50000000025
```

On conjecture : $\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{x+1}{x+2}=\frac{1}{2}$

b. On conjecture : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{1+x}{x}=+\infty$

c. On conjecture : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{3x^3+x^2}{x^2}=1$

Exercice 2

Déterminons les nombres dérivés de quelques fonctions de référence pour $x=3$

1. Le nombre dérivé de la fonction carré en 3 :

a. Pour $x\neq3$, établir l'égalité suivante : $\frac{x^2-3^2}{x-3}=x+3$

b. Soit f la fonction carré.

En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{x\mapsto3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

2. Le nombre dérivée de la fonction inverse en 3 :

a. Pour $x\neq3$, établir l'égalité suivante : $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=\frac{-1}{3x}$

b. Soit g la fonction inverse.

En déduire la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$

3. Le nombre dérivée de la fonction racine carrée en 3 :

a. Pour $x\neq3$, établir que : $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$

b. Soit h la fonction racine carrée.

En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{x\mapsto3}\frac{h(x)-h(3)}{x-3}$

Correction 2

1. a. On a les transformations algébriques :

$$\frac{x^2-3^2}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$$

BY-NC

b. Ainsi, on a l'égalité suivante :

$$\lim_{x\mapsto 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\mapsto 3}\frac{x^2-3^2}{x-3}=\lim_{x\mapsto 3}x+3=6$$

Ainsi, le nombre dérivé de la fonction f en 2 vaut 4.

2. a. $$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=\frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3}=\frac{3-x}{3x}\times\frac{1}{x-3}$$

$$=\frac{-(x-3)}{3x}\times\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3x}$$

b. On a l'égalité suivante :

$$\lim_{x\mapsto 3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\mapsto 3}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=\lim_{x\mapsto 3}-\frac{1}{3x}=-\frac{1}{9}$$

La fonction inverse admet $-\frac{1}{4}$ comme nombre dérivée en 2.

3. a. Sachant que le facteur $\sqrt{x}+\sqrt{3}$ ne s'annulant pas, on a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\frac{\big(\sqrt{x}-\sqrt{3}\big)\big(\sqrt{x}+\sqrt{3}\big)}{(x-3)\big(\sqrt{x}+\sqrt{3}\big)}=\frac{\big(\sqrt{x}\big)^2-\big(\sqrt{3}\big)^2}{(x-3)\big(\sqrt{x}+\sqrt{3}\big)}$$

$$=\frac{x-3}{(x-3)\big(\sqrt{x}+\sqrt{3}\big)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$$

b. On a l'égalité suivante

$$\lim_{x\mapsto 3}\frac{h(x)-h(3)}{x-3}=\lim_{x\mapsto 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}$$

https://chingatome.fr BY-NC