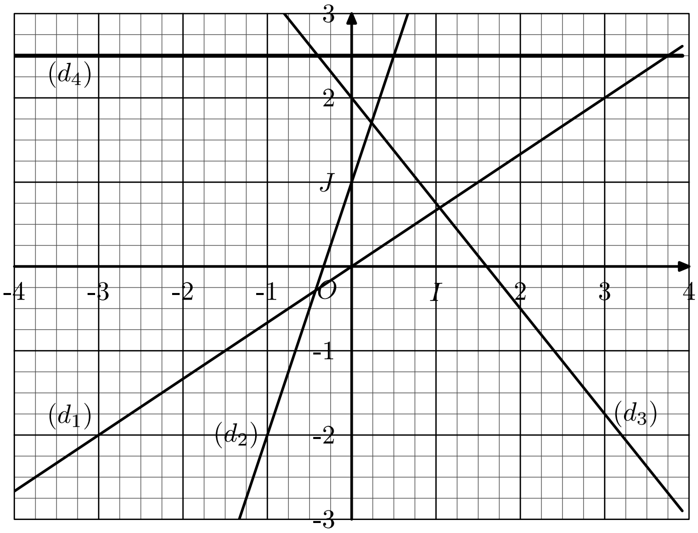
Tangentes et équations de droites

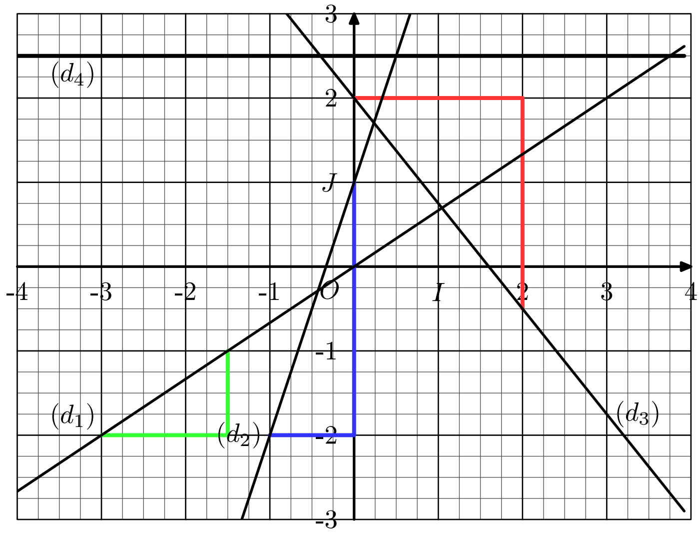
Exercice 1

Déterminer les coefficients directeurs des quatre droites représentées ci-dessous :



Correction 1

On a fait ressortir en couleurs les triangles rectangles permettant de calculer facilement le coefficient directeur de chacune des droites :



a. Calcul du coefficient directeur de (d_1) :

La droite (d_1) passe par les points $(-3\,;-2)$ et $(-1{,}5\,;-1)$. Le coefficient directeur de cette droite est :

$$c_1 = \frac{-1-(-2)}{-1{,}5-(-3)} = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$$

b. Calcul du coefficient directeur de (d_2) :

La droite (d_2) passe par les points $(-1\,;-2)$ et $(0\,;1)$. Le coefficient directeur de cette droite est :

$$c_2 = \frac{1-(-2)}{0-(-1)} = \frac{3}{1} = 3$$

c. Calcul du coefficient directeur de (d_3) :

La droite (d_3) passe par les points $(0\,;2)$ et $(2\,;-0{,}5)$. Le coefficient directeur de cette droite est :

$$c_3 = \frac{-0{,}5-2}{2-0} = \frac{-2{,}5}{2} = -\frac{5}{4}$$

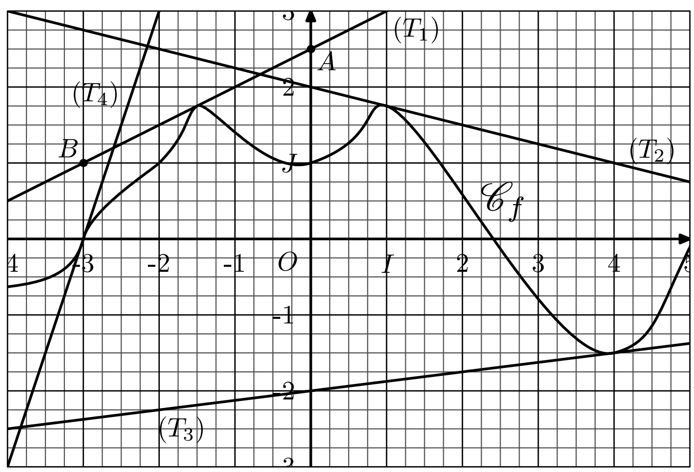
d. Calcul du coefficient directeur de (d_4) :

La droite (d_4) est parallèle à l'axe des abscisses : son coefficient directeur est nul.

$$c_4 = 0$$

Exercice 2

Ci-dessous est représentée, dans le repère $(O\,;I\,;J)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ et quatre de ses tangentes :



1. La droite (T_1) s'appelle :

   "*La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-1{,}5$*"

   Nommer de même les trois autres droites.

2. Déterminer l'équation réduite de chacune de ces quatres tangentes.

Correction 2

1. Voici les intitulés possibles des trois autres droites :
   - (T_2) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 ;
   - (T_3) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4 ;
   - (T_4) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3.

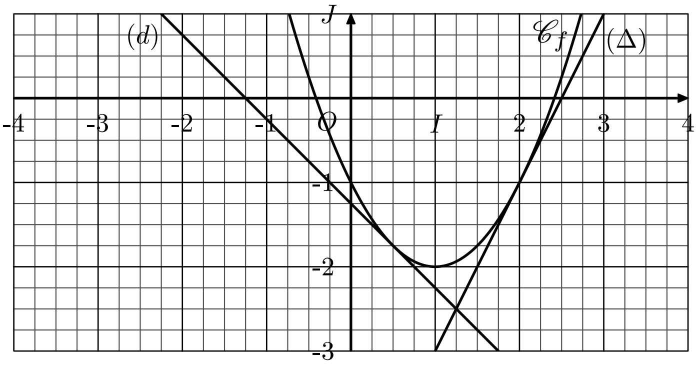
2. Déterminons les équations réduites de ces quatre tangentes.

- La droite (T_1) passe par les points :
  $A(-3\,;1)\quad;\quad B(0\,;2{,}5)$
  Elle admet pour coefficient directeur :
  $a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{2{,}5-1}{0-(-3)}=\dfrac{1{,}5}{3}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$
  Ainsi, son équation réduit a pour expression :
  $y=\dfrac{1}{2}\cdot x+b$
  Les coordonnées du point B vérifient cette équation :
  $2{,}5=\dfrac{1}{2}\times 0+b$
  $b=2{,}5$
  La droite (T_1) admet pour équation réduite :
  $(T_1):\ y=\dfrac{1}{2}\cdot x+\dfrac{5}{2}$
- La droite (T_2) passe par les points :
  $A(0\,;2)\quad;\quad B(4\,;1)$
  Elle admet pour coefficient directeur :
  $a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{1-2}{4-0}=\dfrac{-1}{4}=-\dfrac{1}{4}$
  Ainsi, son équation réduit a pour expression :
  $y=-\dfrac{1}{4}\cdot x+b$
  Les coordonnées du point A vérifient cette équation :
  $2=-\dfrac{1}{4}\times 0+b$
  $b=2$
  La droite (T_2) admet pour équation réduite :
  $(T_2):\ y=-\dfrac{1}{4}\cdot x+2$
- La droite (T_3) passe par les points :
  $A(0\,;-2)\quad;\quad B(4\,;-1{,}5)$
  Elle admet pour coefficient directeur :
  $a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-1{,}5-(-2)}{4-0}=\dfrac{0{,}5}{4}=\dfrac{1}{8}$
  Ainsi, son équation réduit a pour expression :
  $y=\dfrac{1}{8}\cdot x+b$
  Les coordonnées du point A vérifient cette équation :
  $-2=\dfrac{1}{8}\times 0+b$
  La droite (T_3) admet pour équation réduite :
  $(T_3):\ y=\dfrac{1}{8}\cdot x-2$
- La droite (T_4) passe par les points :
  $A(-2\,;3)\quad;\quad B(-3\,;0)$
  Elle admet pour coefficient directeur :
  $a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{0-3}{-3-(-2)}=\dfrac{-3}{-1}=3$
  Ainsi, son équation réduit a pour expression :
  $y=3\cdot x+b$
  Les coordonnées du point B vérifient cette équation :
  $0=3\times-3+b$
  $0=-9+b$
  $b=9$
  La droite (T_4) admet pour équation réduite :
  $(T_4):\ y=3\cdot x+9$

Exercice 3*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x)=x^2-2\cdot x-1$

On munit le plan d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé. On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f.



On note respectivement (d) et (Δ) les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ et 2.

1. Déterminer les coordonnées des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant respectivement $\dfrac{1}{2}$ et 2 pour abscisse.

2. Graphiquement :

   a. Déterminer les coefficients directeurs des droites (d) et (Δ).

   b. Déterminer les équations réduites des droites (d) et (Δ).

Correction 3

1. Par la fonction f, on a les images de nombres :
   - $f\Big(\dfrac{1}{2}\Big)=\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^2-2\times\dfrac{1}{2}-1=\dfrac{1}{4}-1-1=-\dfrac{7}{4}$
     Ainsi, le point de coordonnées $\Big(\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{7}{4}\Big)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   - $f(2)=2^2-2\times2-1=4-4-1=-1$
     Ainsi, le point de coordonnées $(2\,;-1)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$

2. a.
   - La droite (d) passe par les points de coordonnées :
     $\Big(-\dfrac{5}{4}\,;0\Big)\quad;\quad\Big(\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{7}{4}\Big)$
     Ainsi, la droite (d) a pour coefficient directeur :
     $$a=\dfrac{0-\Big(-\dfrac{7}{4}\Big)}{-\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\dfrac{7}{4}}{-\dfrac{7}{4}}=-1$$
   - La droite (Δ) passe par les points de coordonnées :
     $(2\,;-1)\quad;\quad(1\,;-3)$
     Ainsi, la droite (Δ) a pour coefficient directeur :
     $a'=\dfrac{-1-(-3)}{2-1}=\dfrac{2}{1}=2$

   b. D'après la question précédente, les droites (d) et (Δ) admettent des équations réduites de la forme :
   $(d):y=-x+b\quad;\quad(\Delta):y=2x+b'\quad$ où $b,\ b'\in\mathbb{R}$
   - La droite (d) passe par le point de coordonnées $\Big(\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{7}{4}\Big)$. Ainsi, les coordonnées de ce point vérifient l'équation réduite de cette droite :

$$y = -x + b$$
$$-\frac{7}{4} = -\frac{1}{2} + b$$
$$b = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}$$
$$b = -\frac{7}{4} + \frac{2}{4}$$
$$b = -\frac{5}{4}$$

Ainsi, la droite (d) admet pour équation réduite :

$$(d) : y = -x - \frac{5}{4}$$

- La droite (Δ) passe par le point de coordonnées $(2\,;-1)$. Ainsi, les coordonnées de ce point vérifient l'équation réduite de cette droite :

$$y = 2x + b'$$
$$-1 = 2\times 2 + b'$$
$$-1 = 4 + b'$$
$$b = -1 - 4$$
$$b = -5$$

Ainsi, la droite (Δ) admet pour équation réduite :

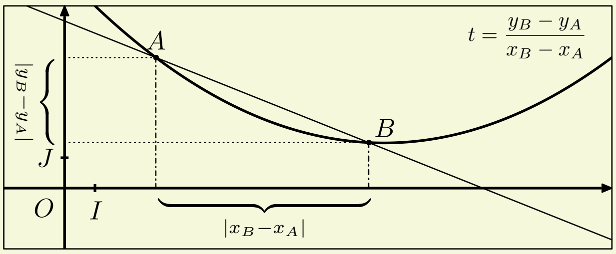
$$(\Delta) : y = 2x - 5$$

Exercice 4

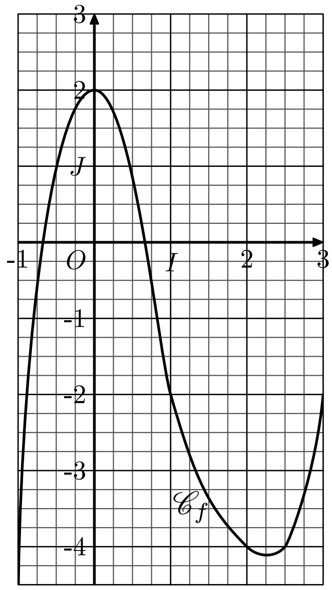
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a, b deux nombres réels appartenant à I.
On appelle taux d'accroissement de la fonction f entre a et b, le nombre t définit par :

$$t = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarque : Dans un repère et en considérant la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur I, le taux d'acrroissement de la fonction f entre a et b correspond au coefficient directeur de la courbe entre les points A et B d'abscisse respective a et b :



Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé ci-contre est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.
On considère les points A, B, C de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 0, 1 et 2



1. Placer les points A, B et C et par lecture graphique, donner leur coordonnée.
2. Calculer le taux d'accroissement de la fonction f :
   a. entre 0 et 2
   b. entre 1 et 2

Correction 4

1. Graphiquement, on obtient les coordonnées suivantes :

$A(0\,;2)$; $B(1\,;-2)$; $C(2\,;-4)$

2. a. Le taux d'accroissement entre 0 et 2 est :

$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-4-2}{2-0} = \frac{-6}{2} = -3$$

   b. Le taux d'accroissement entre 1 et 2 est :

$$\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-2-(-4)}{1-2} = -2$$