Calculer les termes d'une suite

Exercice 1

On considère l'algorithme suivant :

```
Pour i allant de 0 à 5
    a ← i×(i−1)
Fin Pour
```

1. Lors de l'exécution pas à pas de cet algorithme, donner les valeurs prises par la variable a.

2. Donner l'expression d'une suite (u_n) dont les six premiers termes sont les valeurs affichées par l'algorithme.

Correction 1

1. Voici synthétisé ci-dessous, le fonctionnement de l'algorithme :

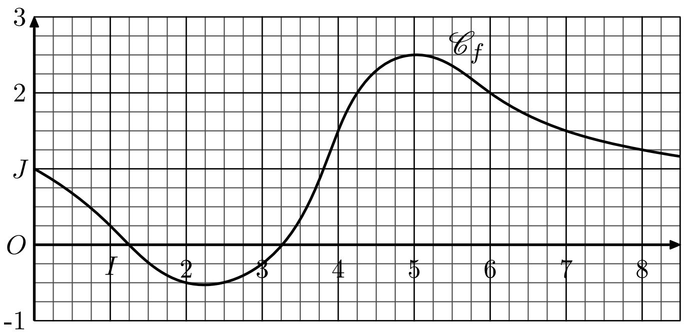
i	a
0	$0\times(0-1)$
1	$1\times(1-1)$
2	$2\times(2-1)$
3	$3\times(3-1)$
4	$4\times(4-1)$
5	$5\times(5-1)$

Ainsi, les différentes valeurs affectées à la variable a sont
$0 \quad ; \quad 0 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad 6 \quad ; \quad 12 \quad ; \quad 20$

2. La suite (u_n) permettant d'obtenir ces six premiers termes est :
$u_n = n\cdot(n-1)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée dans le repère orthonormé $(O;I;J)$ ci-dessous :



On définit la suite (u_n) par la relation :
$u_n = f(n)$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.

1. Justifier que le terme u_4 a pour valeur $\dfrac{3}{2}$.

2. Déterminer la valeur des termes :
$u_0 \quad ; \quad u_1 \quad ; \quad u_2 \quad ; \quad u_3 \quad ; \quad u_4 \quad ; \quad u_5 \quad ; \quad u_6$

Correction 2

1. Le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 4 a pour coordonnée $\left(4;\dfrac{3}{2}\right)$. Ainsi, l'image de 4 par la fonction f a pour valeur $\dfrac{3}{2}$. On en déduit la valeur du terme u_4 de la suite : $u_4 = f(4) = \dfrac{3}{2}$

2. Voici les termes de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$

Exercice 3

Déterminer les 5 premiers termes des suites suivantes :

a. $u_n = 2\cdot n^2 - n + 1$ b. $v_n = \dfrac{2\cdot n+1}{2-3\cdot n}$

c. $w_n = \sqrt{3n+25}$ d. $x_n = 3\cdot\left[1+(-1)^n\right]+2$

Correction 3

a. Pour la suite (u_n) définie par $u_n = 2\cdot n^2 - n + 1$, on a :

n	0	1	2	3	4
u_n	1	2	7	16	29

b. Pour la suiie (v_n) définie par $v_n = \dfrac{2\cdot n+1}{2-3\cdot n}$, on a :

n	0	1	2	3	4
v_n	$\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{5}{4}$	-1	$-\frac{9}{10}$

c. Pour la suite (w_n) définie par $w_n = \sqrt{3n+25}$, on a :

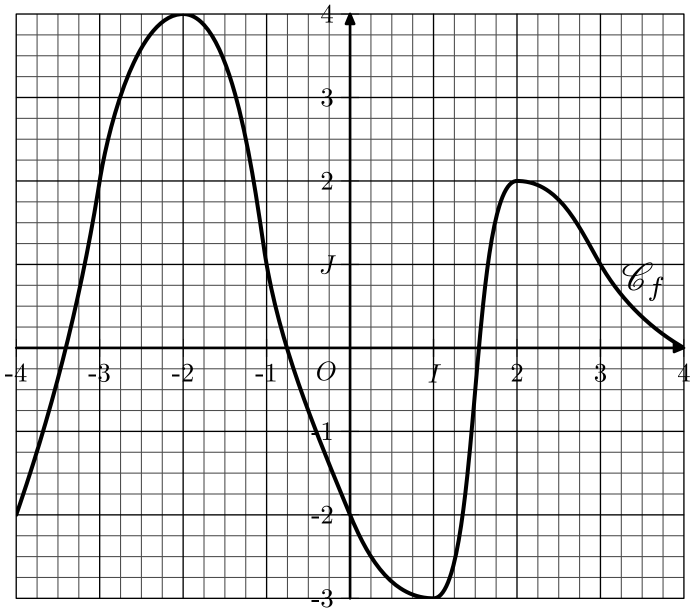
n	0	1	2	3	4
w_n	5	$2\sqrt{7}$	$\sqrt{31}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{37}$

d. Pour la suite (x_n) définie par $x_n = 3\cdot\left[1+(-1)^n\right]+2$, on a :

n	0	1	2	3	4
x_n	8	2	8	2	8

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$, on considère la représentation $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4;4]$:



On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les relations :

$$u_{n+1} = f\big(u_n\big) \quad ; \quad v_{n+1} = f\big(v_n\big) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

vérifiant les conditions initiales suivantes :

$$u_0 = -1 \quad ; \quad v_0 = -4$$

Déterminer les 100 premiers termes de chacune de ces deux suites.

Correction 4

- Voici les termes de la suite $\big(u_n\big)$:
  - $u_0 = -1$
  - $u_1 = f(u_0) = f(-1) = 1$
  - $u_2 = f(u_1) = f(1) = -3$
  - $u_3 = f(u_2) = f(-3) = 2$
  - $u_4 = f(u_3) = f(2) = 2$
  - $u_5 = f(u_4) = f(2) = 2$

  On comprend que la suite $\big(u_n\big)$ est stationnaire à partir du rang 3. Ainsi, la suite $\big(u_n\big)$ peut s'écrire sous la forme :
  $\big(-1\,;\,1\,;\,-3\,;\,2\,;\,2\,;\,2\,;\,\dots\big)$
- Voici les termes de la suite $\big(v_n\big)$:
  - $v_0 = -4$
  - $v_1 = f(v_0) = f(-4) = -2$
  - $v_2 = f(v_1) = f(-2) = 4$
  - $v_3 = f(v_2) = f(4) = 0$
  - $v_4 = f(v_3) = f(0) = -2$
  - $v_5 = f(v_4) = f(-2) = 4$

  A partir du rang 1, la suite $\big(v_n\big)$ est périodique. On peut écrire :
  $\big(-4\,;\,-2\,;\,4\,;\,0\,;\,-2\,;\,4\,;\,0\,;\,\dots\big)$

Exercice 5

1. On définit la suite par récurrence $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation :
   $$u_0=5 \quad ; \quad u_{n+1}=2\cdot u_n-1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   Déterminer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. On définit la suite par récurrence $\big(v_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par la relation :
   $$v_1=-2 \quad ; \quad v_{n+1}=\frac{1-v_n}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$
   Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n).

Correction 5

1. Voici les cinq premiers termes de la suite $\big(u_n\big)$:

n	0	1	2	3	4
u_n	5	9	17	33	65

2. Voici les cinq premiers termes de la suite $\big(v_n\big)$:

n	1	2	3	4	5
v_n	-2	3	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$