Accompagnement personnalisé sur les fonctions : lectures et calculs

Partie A : lectures graphiques

Méthodes pour lire sur une courbe représentant une fonction :

Pour lire l'image de a par f :

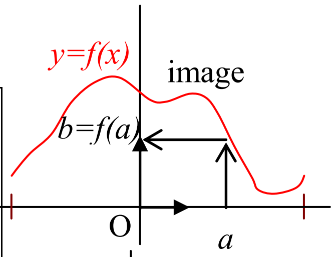
● Dans un repère orthogonal, on repère a sur l'axe des abscisses et on trace la verticale jusqu'à la courbe et on lit **l'image sur l'axe des ordonnées**.

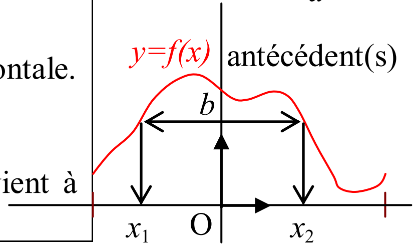
Pour lire les antécédents de b par f :

● Dans un repère orthogonal, on repère b sur l'axe des ordonnées et on trace l'horizontale. Si elle coupe la courbe, on lit **les antécédents sur l'axe des abscisses**.

Pour résoudre graphiquement des équations de la forme $f(x) = k$:

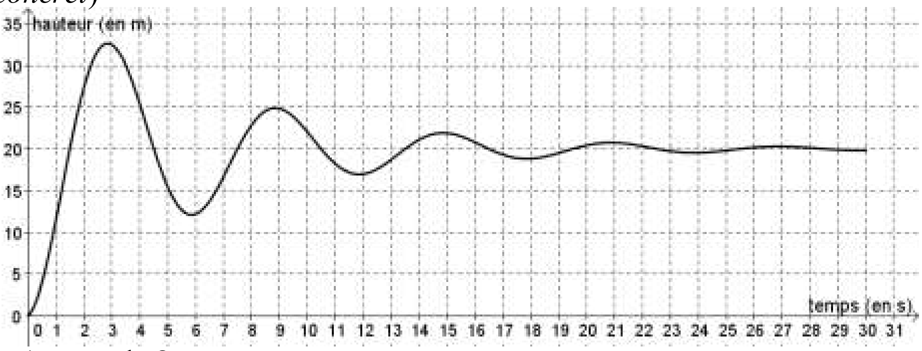
● Chercher les abscisses des points de la courbe où l'ordonnées est k : cela revient à chercher les antécédents de k par f.





Exercice 1 : (*lectures à partir d'un problème concret*)

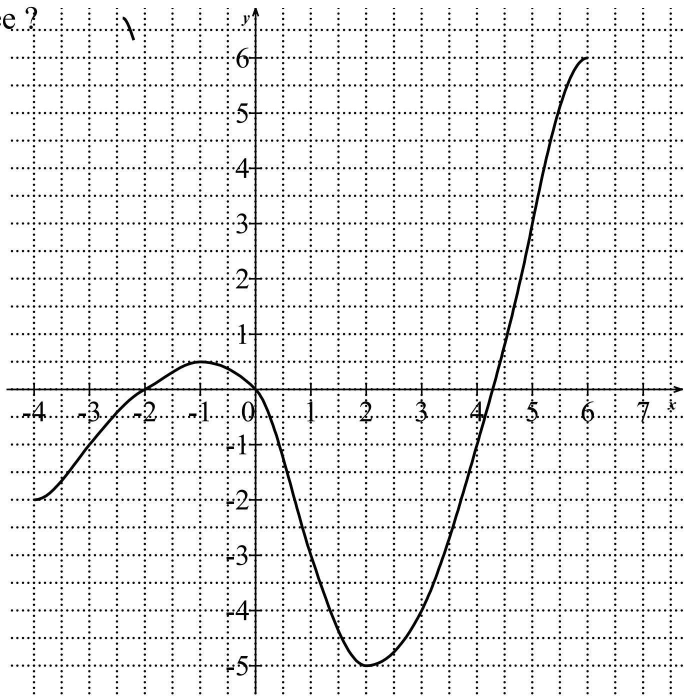
Un acrobate est accroché à un élastique.
Il est maintenu au sol initialement en étirant fortement l'élastique.
A l'instant $t=0$, on lâche l'acrobate qui monte verticalement et commence alors des pirouettes artistiques.
Afin d'améliorer sa performance, on a enregistré la hauteur de l'acrobate (en mètres) en fonction du temps.



1/ Quelle est la hauteur de l'acrobate au bout de 1 seconde ?
2/ A quels instants la hauteur de l'acrobate est-elle de 25 mètres ?
3/ A quels moments la hauteur de l'acrobate dépasse-t-elle 30 mètres ?
4/ A quels instants la hauteur de l'acrobate est-elle inférieure à 15 mètres ?
5/ On note f la fonction qui à l'instant t associe la hauteur, c'est à dire $f\colon temps \mapsto hauteur$.
a/ Sur quel axe lit-on les "antécédents" ?
b/ Sur quel axe lit-on les "images" ?
c/ A quelle hauteur est associée le temps 30 seconde ?
d/ Quels instants correspondent à une hauteur de 10 mètres.
e/ Lire la valeur de $f(15)$.
f/ Résoudre graphiquement $f(t)=10$.
6/ Quel est l'ensemble des instants où la hauteur a été enregistrée ?

Exercice 2 : (*Lire sur une courbe représentant une fonction*)

Voici ci-contre la courbe représentant une fonction f.
Soit f la fonction définie par la courbe ci-contre.
0/ Une fonction transforme un réel x en un autre noté $f(x)$, ce qui se note : $x \mapsto f(x)$.
a/ Sur quel axe lit-on x ? Placer x sur cet axe.
b/ Sur quel axe lit-on $f(x)$? Placer $f(x)$ sur cet axe.
1/ Lire les images par f de -3 ; -1 et 2.
2/ Lire l(es) antécédent(s) de -2.
3/ Pour quelles valeurs de x le point de coordonnées $(x;3)$ appartient à la courbe ?
4/ Lire $f(1)$.
5/ Résoudre graphiquement $f(x)=1$.
6/ Lire $f(3)$ et $f(-4)$.
7/ Résoudre graphiquement $f(x)=-1$ puis $f(x)=5$.
8/ Donner l'ensemble de définition de f.

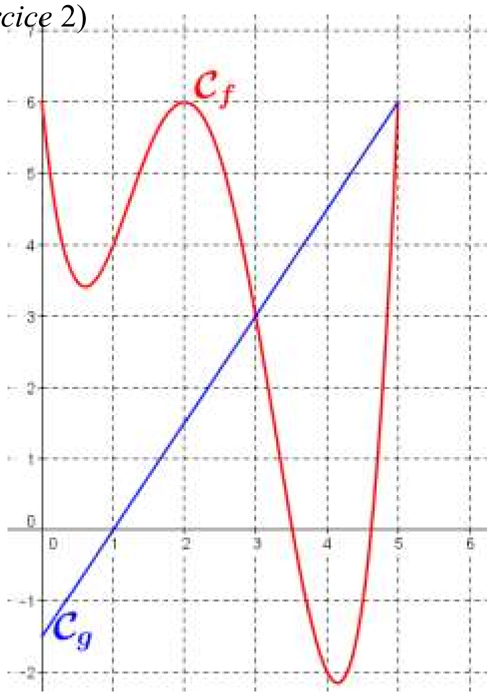


Réponses partielles :

I/ 1/ 11m. 2/ 1.8s et4s. 3/ entre 2.2s et 3.3s. 4/ avant 1.2s et entre 5s et 6.7s. 5/ a/ abscisses. b/ ordonnées. c/ 20m. d/ 1s. e/ $f(15)=22$. f/ $t=1$. 6/ entre 0 et 30 : [0;30].
II/ 0/a/ x en abscisses. b/ $f(x)$ en ordonnées. 1/ $f(-3)=-1$; $f(-1)=0.5$; $f(2)=-5$. 2/ $f(-4)=-2$; $f(0.7)=-2$; $f(3.7)=-2$. 3/ revient à chercher les antécédents de 3 par f : en $x=5$. 4/ image de 1 par f : $f(1)=-3$. 5/ revient à chercher les antécédents de 1 par f : $S=\{4.5\}$. 6/ $f(3)=-4$ et $f(-4)=-2$. 7/ $S=\{-3\,;0.4\,;4\}$ puis $S=\{5.5\,;6.5\}$. 8/ $S=[1\,;3.3]$. 9/ $S=]-2\,;0[\cup]4.2\,;7]$. 10/ $[-4\,;7]$.

Exercice 3 : (*Lire sur une courbe représentant une fonction* : *similaire à l'exercice* 2)

Soit f la fonction définie par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre.



0/ Placer sur les axes les mots "images" et "antécédents" ainsi que "x" et "$f(x)$".
1/ Lire les images par f de 1 et 4.
2/ Lire les antécédents de 0 et de 4.
3/ Pour quelles valeurs de x le point de coordonnées $(x;3)$ appartient à la courbe ?
4/ Lire $f(0)$.
5/ Résoudre $f(x) = 1$.
6/ Résoudre $f(x) = 6$ puis $f(x) = 7$.
7/ Donner l'ensemble de définition de f.

Soit g la fonction définie par la courbe $\mathscr{C}_g$ ci-contre.

8/ Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
9/ Lire l'image de 2 par g.
10/ Lire l'antécédent de 4 par g.
11/ Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

Partie B : calculs d'image et d'antécédents

Méthode pour calculer les images et antécédents par une fonction :

- Pour calculer l'**image** de a par f, il suffit de **remplacer** tous les x par a.
- Pour calculer les **antécédents** de a par f, il suffit de résoudre l'**équation** $f(x) = a$.

Exemple : $f(x) = x-9$.
image de 0 : $f(0) = 0-9 = -9$.
antécédent de 0: résoudre $f(x) = 0$.
$x-9 = 0 \Leftrightarrow x = 9$.
9 est l'antécédent de 0 par f.

Exercice 4 : (*Calculer avec une fonction*)

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x-1$.

1/ Déterminer l'ensemble de définition de f.
2/ Déterminer les images de 3 et 0.
3/ Déterminer les antécédents de 7 par f.
4/ Calculer $f(-4)$.
5/ Résoudre $f(x) = 1$.
6/ Justifier que $\frac{2}{3}$ est un antécédent de $\frac{1}{3}$ par f.
7/ Est-ce que le point de coordonnées $A\left(\frac{5}{2} ; 4\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f ? Justifier.
8/ Est-ce que le point de coordonnées $B\left(\frac{5}{4} ; 2\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f ? Justifier.

Exercice 5 : (*Calculer avec une fonction*)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}+4$.

1/ Déterminer l'ensemble de définition de f.
2/ Déterminer l'image de 9.
3/ Déterminer l'antécédent de 5 par f.
4/ Calculer $f(4)$.
5/ Résoudre $f(x) = 13$.
6/ Est-ce que 1 admet une image par f ? Justifier.
7/ Est-ce que 1 admet un antécédent par f ? Justifier.
8/ Justifier que $\frac{9}{4}$ est un antécédent de $\frac{11}{2}$ par f.
9/ Est-ce que le point de coordonnées $A\left(6 ; \frac{13}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f ? Justifier.

Réponses partielles :

III/ 1/ $f(1) = 4$; $f(4) = -2$. 2/ antécédents de 0 : environ 3.5 et 4.5 ; antécédents de 4 : environ 0.3 ; 1 ; 2.7 et 4.9 3/ recherche antécédent de 3 : 3 et 4.8. 4/ $f(0) = 6$ 5/ $S = \{3.3 ; 4.7\}$. 6/ $S = \{0 ; 2 ; 5\}$ 7/ $[0;5]$ 8/ $S = \{3 ; 5\}$ 9/ $g(2) = 1.5$. 10/ 3.7 environ. 11/ $S = \{1\}$.

IV/ 1/ $\mathbb{R}$ 2/ $f(3) = 2\times3-1 = 5$ et $f(0) = -1$. 2/ résoudre $2x-1 = 7$ en isolant d'avoir x. $2x-1 = 7 \Leftrightarrow 2x = 7+1 \Leftrightarrow x = \frac{8}{2} \Leftrightarrow x = 4$. antécédent : 4. 4/ $f(-4) = 2\times(-4)-1 = -9$ 5/ $2x-1 = -1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $S = \{0\}$. 6/ Il suffit de montrer que l'image de $\frac{2}{3}$ est $\frac{1}{3}$: $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\times\frac{2}{3}-1 = \frac{4}{3}-1 = \frac{4}{3}-\frac{3}{3} = \frac{1}{3}$. 7/ Il suffit de savoir si l'image de l'abscisse $\frac{5}{2}$ est bien égale à l'ordonnée 4 : $f(x_A) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 2\times\frac{5}{2}-1 = 5-1 = 4 = y_A$: le point A appartient donc bien à $\mathscr{C}_f$. 8/ $f(x_B) = f\left(\frac{5}{4}\right) = 2\times\frac{5}{4}-1 = \frac{5}{2}-1 = \frac{5}{2}-\frac{2}{2} = \frac{3}{2} \neq 2 = y_B$: le point B n'appartient donc pas à $\mathscr{C}_f$.

V/ 1/ $[0;+\infty[$ 2/ $f(9) = \sqrt{9}+4 = 3+4 = 7$. 3/ $f(x) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x}+4 = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 5-4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1^2 \Leftrightarrow x = 1$. 4/ $f(4) = \sqrt{4}+4 = 2+4 = 6$. 5/ $f(x) = 13 \Leftrightarrow \sqrt{x}+4 = 13 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 9 \Leftrightarrow x = 9^2 \Leftrightarrow x = 81$. $S = \{81\}$. 6/ $f(1)$ existe car $f(1) = \sqrt{1}+4 = 5$. 7/ $f(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+4 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -3$: impossible toute racine est positive : pas d'antécédent de 1 par f. 8/ $f\left(\frac{9}{4}\right) = \sqrt{\frac{9}{4}}+4 = \frac{3}{2}+4 = \frac{3}{2}+\frac{8}{2} = \frac{11}{2}$. 9/ $f(x_A) = f(6) = \sqrt{6}+4 \approx 6.4495 \neq \frac{13}{2} = y_A$: le point A n'appartient donc pas à $\mathscr{C}_f$.