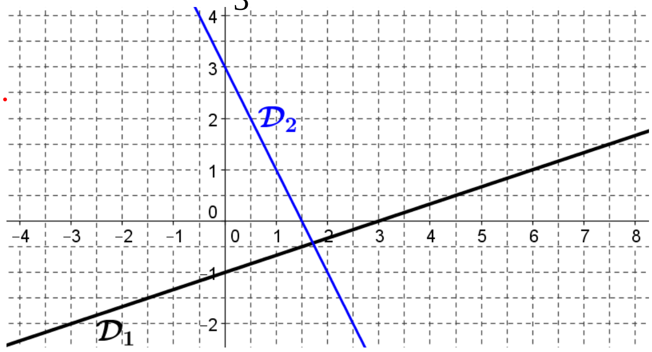
Nombre et calculs 6. Tableau de signes et résolution algébrique d'inéquation

I/ Résolution d'inéquation de degré 1 et signe de $ax+b$

1/ Exemples introductifs

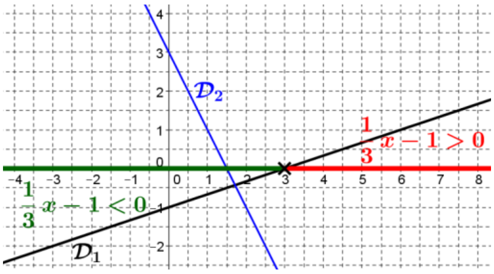
Ci-contre sont représentées deux fonctions f et g définies respectivement par $f(x)=\frac{1}{3}x-1$ et $g(x)=3-2x$.



1/ Quelle droite tracée ci-contre représente f et pourquoi ?

f est croissante sur $\mathbb{R}$ car $a=\frac{1}{3}>0$; ainsi, f est représentée par $\mathcal{D}_1$.

2/ Colorier en vert les abscisses des points de $\mathcal{D}_1$ ayant une ordonnée strictement négative et en rouge les abscisses des points de $\mathcal{D}_1$ ayant une ordonnée strictement positive.



3/ Pour résumer les informations précédentes, on utilise en mathématiques un tableau, appelé tableau de signes, en plaçant dans un tableau les symboles +, $-$ et 0 pour indiquer le signe de l'expression.

Compléter le tableau de signes de $f(x)=\frac{1}{3}x-1$ ci-dessous :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$\frac{1}{3}x-1$		$-$	0	$+$	

4/ De même, quel sera le tableau de signes de $g(x)=3-2x$?

x	$-\infty$		3/2		$+\infty$
$3-2x$		$+$	0	$-$	

5/ Comment peut-on utiliser le tableau de signe de f pour résoudre directement l'inéquation $\frac{1}{3}x-1<0$?

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$\frac{1}{3}x-1$		$\boxed{-}$	0	$+$	

On cherche x pour lesquels l'expression $\frac{1}{3}x-1$ est négative donc les valeurs de x pour lesquelles on obtient le signe $-$. Ainsi : $S=]-\infty;3[$.

2/ Cas général

Théorème :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		Signe opposé de a	0	signe de a	

Exercice

Résoudre l'inéquation $7-5x\geqslant 0$ en suivant les 3 étapes suivantes :

Étape 1 : Résoudre $7-5x=0$:

$7-5x=0 \Leftrightarrow 7=5x \Leftrightarrow \frac{7}{5}=x$.

Étape 2 : Dresser le tableau de signes de $7-5x$:

Placer d'abord le 0 à l'aide de l'étape 1 :

x	$-\infty$		7/5		$+\infty$
$7-5x$		$+$	0	$-$	

Étape 3 : Conclure :

On cherche le signe + et le 0 car on veut $7-5x\geqslant 0$.

$S=\left]-\infty\,;\,\frac{7}{5}\right]$.

3/ Rappel sur la résolution sans tableau de signe d'une inéquation du premier degré

Règle :
Lors de la résolution d'une inéquation l'ordre change lorsque l'on multiplie ou divise par un nombre négatif.

Exemple : Résoudre l'inéquation $5-3x>0$.

$5-3x>0$ (positif : "+") $\Leftrightarrow -3x>-5 \Leftrightarrow x<\frac{-5}{-3} \Leftrightarrow x<\frac{5}{3}$. $\boldsymbol{S}=\left]-\infty;\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right[$.

II/ Signe d'un produit

Méthode : Pour étudier le signe d'un produit, on peut indiquer dans un tableau le signe de chaque facteur, puis déterminer le signe du produit à l'aide de la règle des signes.

Exercice :
Dresser le tableau de signe de $(x+3)(2-x)$:
$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$
$2-x=0 \Leftrightarrow x=2$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$(x+3)$		–	0	+		+	
$(2-x)$		+		+	0	–	
$(x+3)(2-x)$		–	0	+	0	–	

III/ Résolution d'inéquation produit

Méthode : Pour résoudre une inéquation produit
1/ Dans un même tableau de signes, commencer par étudier le signe de chacun des facteurs.
2/ En déduire le signe du produit dans une dernière ligne.
3/ Utiliser cette dernière ligne pour trouver les solutions de l'inéquation.

Exercice :
Résoudre l'inéquation $(2x+5)(6-3x)\geqslant 0$.

$2x+5=0 \Leftrightarrow 2x=-5 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$.

$6-3x=0 \Leftrightarrow 6=3x \Leftrightarrow \frac{6}{3}=x \Leftrightarrow x=2$.

x	$-\infty$		-5/2		2		$+\infty$
$(2x+5)$		–	0	+		+	
$(6-3x)$		–		–	0	+	
$(2x+5)(6-3x)$		+	0	–	0	+	

$S=\left]-\infty\,;-\frac{5}{2}\right]\cup[2\,;+\infty[$.