

Exercices de révision pour le CCF sur les chaînes de Markov

Exercice 1 : (Chaîne de Markov)

Le gestionnaire d'un site web, composé de trois pages web numérotées de 1 à 4 et reliées entre elles par des liens hypertextes, désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web.

Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

- Si un internaute est sur la page n°1, alors il ira soit sur la page n°2 avec une probabilité de $\frac{1}{6}$, soit sur la page n°3 avec la probabilité de $\frac{1}{3}$, soit sur la page n°4 avec la probabilité de $\frac{1}{2}$.
- Si un internaute est sur la page n°2, alors il ira soit sur la page n°1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, soit il restera sur la page n°2 avec une probabilité de $\frac{1}{4}$, soit il ira sur la page n°4 avec la probabilité de $\frac{1}{4}$,
- Si un internaute est sur la page n°3, alors il ira soit sur la page n°1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, soit il ira sur la page n°2 avec une probabilité de $\frac{1}{4}$, soit il restera sur la page n°3 avec la probabilité de $\frac{1}{4}$.
- Si un internaute est sur la page n°4, alors il ira soit sur la page n°1 avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, soit il ira sur la page n°2 avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, soit il restera sur la page n°4 avec la probabilité de $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n , on définit les événements suivants :

- A_n : "après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n°1",
- B_n : "après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n°2",
- C_n : "après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n°3".
- D_n : "après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n°4".

On notera P_n l'état à la n-ième navigation : $P_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \\ P(D_n) \end{pmatrix}$.

1/ Construire le graphe probabiliste associé à ce processus aléatoire.

2/ Donner la matrice de transition T associée à la matrice état P_n .

3/ Proposer une estimation des fréquences de fréquentation du site et de ses pages à long terme (expliquer la démarche) et donner le classement par ordre décroissant de pertinence de ces trois pages.

Exercice 2 :

Voici un mini web à quatre sites A, B, C et D dont voici la modélisation par un graphe :

Partie A : sans saut aléatoire

1/ Déterminer la matrice de transition modélisant le surf sur ce mini web.

2/ Classer ces quatre sites par ordre de pertinence.

Partie B : avec saut aléatoire

Imaginons un internaute qui « surfe » au hasard. Quand il est sur une page,

- Soit, avec une probabilité 0.8, il clique au hasard sur l'un des liens disponibles depuis cette page ;
- Soit, avec une probabilité 0.2, il choisit une page au hasard dans l'ensemble du réseau, celle-ci peut être celle sur laquelle il est déjà.

1/ Déterminer la matrice de transition modélisant le surf sur ce mini web.

2/ Classer ces quatre sites par ordre de pertinence.

3/ Que constatez-vous quant à l'effet du saut sur le classement ?

