

Exercices de révision pour le CCF sur les équations différentielles

Exercice 1 : (équation différentielle à la main et sur Xcas)

On considère un chauffe-eau muni d'une résistance électrique.

On admet que la température en °C, notée $\theta(t)$, de l'eau contenue dans ce chauffe-eau au bout de t secondes

vérifie l'équation différentielle : (E) : $y' + \frac{3}{10000}y = \frac{2}{100}$.

On sait que la température initiale est de 20°C.

1/ Résoudre à la main l'équation $y' + \frac{3}{10000}y = 0$.

2/ a/ Déterminer le réel p pour lequel la fonction constante f telle que $f(t) = p$ est solution de $y' + \frac{3}{10000}y = \frac{2}{100}$.

b/ En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + \frac{3}{10000}y = \frac{2}{100}$.

3/ a/ Déterminer la fonction θ .

b/ Vérifier sur Xcas.

4/ Déterminer la limite L à long terme de θ .

5/ Déterminer le temps nécessaire, en heures, minutes et secondes, pour atteindre une température de 65°C.

Exercice 2 : (Equation différentielle à la main et sur Xcas)

On fait absorber une substance, dosée à 2 mg de principe actif, à un animal.

Cette substance libère peu à peu un principe actif qui passe dans le sang.

On appelle $f(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t ($t > 0$), donné en heures.

Après étude, on constate que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0.5y = 0.5e^{-0.5t}$.

Avant l'absorption, la substance n'est pas présente dans le sang.

1/ Quelle est la condition initiale de cette équation différentielle ?

2/ Résoudre l'équation sans second membre : $y' + 0.5y = 0$ dans $[0 ; +\infty[$.

3/ h est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(t) = 0.5te^{-0.5t}$.

À l'aide d'un logiciel, prouver que h est une solution particulière de (E).

4/ Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E).

5/ Vérifier le résultat obtenu avec Xcas.

6/ Quelle est la quantité maximale M de principe actif dans le sang ? Expliquer.

7/ A quel instant T principe actif dans le sang n'atteint plus que 10% de la quantité maximale M ? Expliquer.