Exercice de révision pour le CCF sur les équations différentielles et la transformée en Z

<u>Exercice 1 :</u> (*Equation différentielle à la main et sur Xcas et transformée en Z*)

<u>Partie A :</u>

Le signal d'entrée est la fonction échelon unité $\mathcal{U}$. Le signal de sortie est la fonction s, définie sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty\,;0[$ et solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle : $10\dfrac{ds}{dt}(t)+s(t)=2\mathcal{U}(t)$ avec $s(0)=5$.

1/ Justifier qu'il suffit de résoudre l'équation différentielle $10s'+s=2$, avec $s(0)=5$ sur $[0;+\infty[$.

2/ Résoudre à la main l'équation $10s'+s=0$.

3/ Déterminer le réel c pour lequel la fonction constante f telle que $f(t)=c$ est solution de $10s'+s=2$.

4/ En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $10s'+s=2$.

5/ Déterminer à la main la fonction de sortie s solution sur $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle $10s'+s=2$, avec $s(0)=5$.

6/ Vérifier sur Xcas la solution trouvée.

7/ Déterminer la valeur du nombre réel L, limite de $s(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

8/ On appelle **temps de réponse du système** la valeur du nombre réel t à partir de laquelle $s(t)$ n'atteint plus que 102% de la valeur de la limite L calculée à la question 7/.
Déterminer une valeur approchée, à 0.01 seconde près, du temps de réponse du système.

<u>Partie B :</u>

Le signal d'entrée est un échelon unité échantillonné. Il est modélisé par la suite $(\mathcal{U}(0.5k))_{k\in\mathbb{N}}$.

1/ Pour caractériser le signal de sortie, la méthode consiste à remplacer, dans l'équation différentielle de la **partie A**, t par $0.5k$ et $\dfrac{ds}{dt}(0.5k)$ par $\dfrac{s(0.5(k+1))-s(0.5k)}{0.5}$.

Montrer que l'on a : $s(0.5(k+1))=0.95s(0.5k)+0.1$ avec $s(0)=5$.

2/ On pose désormais $a_k=s(0.5k)$. On définit ainsi la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $a_{k+1}=0.95a_k+0.1$ avec $a_0=5$.

a/ Calculer à la main a_1 puis a_2.

b/ Quelle formule suffit-il de saisir dans la case C2 afin que d'obtenir les premières valeurs de la suite (a_n) ?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$a(n)$	5										

3/ On note $A(z)$ la transformée en Z de la suite a_n.

Déduire la relation $a_{k+1}=0.95a_k+0.1$ que $A(z)=\dfrac{z(5z-4.9)}{(z-1)(z-0.95)}$.

4/ Déterminer les réels a et b tels que $A(z)=a\dfrac{z}{z-1}+b\dfrac{z}{z-\frac{95}{100}}$.

5/ En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de a_n.

6/ Déterminer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$.

7/ En déduire, à 10^{-2} près, le temps de réponse en secondes du système numérique. (La notion de temps de réponse a été définie à la question 8/ de la partie A.)

8/ Comparer les limites et les temps de réponse.