Exercices de révision pour le CCF sur la transformée en *Z*

<u>Exercice 1 :</u> (*transformée en Z*)

Soit (u_n) la suite définie par la formule de récurrence suivante :

pour tout entier naturel n : $10u(n+2) = 2u(n) - u(n+1) + 9$, avec $u(0) = 2$ et $u(1) = 5$.

Partie A : quelques valeurs

1/ Calculer à la main la valeur exacte de $u(2)$.

2/ Quelle formule suffit-il de saisir dans la case D2 afin que d'obtenir par glissement les premières valeurs de la suite $(u(n))$?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$u(n)$	2	5								

Partie B : toutes les valeurs

On note $U(z)$ la transformée en Z de la suite causale $(u(n))$.

1/ Démontrer que $U(z) = \dfrac{z\left(20z^2+32z-43\right)}{(z-1)(2z+1)(5z-2)}$.

2/ Déterminer les réels a, b et c tels que $U(z) = a\dfrac{z}{z+\dfrac{1}{2}} + b\dfrac{z}{z-\dfrac{2}{5}} + c\dfrac{z}{z-1}$.

3/ Déterminer l'expression de $u(n)$ en fonction de n.

<u>Exercice 2 :</u> (*transformée en Z*)

Pour simuler le fonctionnement du circuit, on approche la tension d'entrée v par un signal discret causal x et la tension de sortie s par un signal discret causal y.

Un pas de discrétisation Te étant choisi, les signaux x et y vérifient, pour tout nombre entier n, l'équation :

$0{,}005\dfrac{y(n)-y(n-1)}{Te} + y(n) = x(n)$. (E).

1/ Dans toute la suite de l'exercice, on choisit $Te = 0{,}5\times10^{-3}$ s.

Montrer que l'équation (E) s'écrit alors : $11y(n) - 10y(n-1) = x(n)$.

2/ On suppose désormais que $x(n) = 2u(n)$ où u est l'échelon unité causal discret défini par $u(n) = 1$ pour tout entier naturel n. On prend $y(0) = 0$.

a/ Calculer $y(1)$ et $y(2)$.

b/ Quelle formule suffit-il de saisir dans la case C2 pour obtenir les premières valeurs de la suite $(y(n))$?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$y(n)$	0										

3/ On note $Y(z)$ la transformée en Z du signal discret y.

Justifier que la relation précédente permet d'écrire : $Y(z) = \dfrac{2}{11}\dfrac{z^2}{(z-1)\left(z-\dfrac{10}{11}\right)}$.

4/ Déterminer, à l'aide de Xcas, l'expression du signal $y(n)$.

5/ D'après le tableur, quelle semble être la limite L de la suite $(y(n))$?

6/ Prouver cette limite de $y(n)$ en utilisant Xcas.

7/ Le temps de réponse est le temps nécessaire pour que l'écart relatif $\left|\dfrac{y(n)-L}{L}\right|$ devienne inférieur à 0.05.

Déterminer le temps de réponse.