$\boxed{AP}$ Exo2

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $u_n \leq 3$ ".

* Init :

$u_0 = 0$ donc $u_0 \leq 3$ et $P(0)$ est vraie.

* Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$.

$u_n \leq 3$

$\Rightarrow u_n + 6 \leq 9$

$\Rightarrow \sqrt{4_n + 6} \leq 3$

$\Rightarrow u_{n+1} \leq 3$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3$.

Exo3 : On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $u_n = 3\times 2^n + 4$ ".

Init : $3 \times 2^0 + 4 = 7$; $u_0 = 7$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$.

$u_{n+1} = 2u_n - 4 = 2(3\times 2^n + 4) - 4 = 2\times 3 \times 2^n + 8 - 4$

$= 3 \times 2^{n+1} + 4$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3\times 2^n + 4$

Exo5 :

1)2) f est dérivable sur $[1;+\infty[$

Soit $x \in [1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{4(x+2) - (4x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{9}{(x+2)^2}$

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
9	$+$
$(x+2)^2$	$+$
$f'(x)$	$+$
f	$\nearrow$

3) $x \geq 1$ donc $f(x) \geq f(1)$ car f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

4) Or $f(1) = 1$ donc $f(x) \geq 1$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $u_n \geq 1$ ".

Init : $u_0 = 4 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$.

$u_n \geq 1$ donc $f(u_n) \geq f(1)$ car f est strict. croissante sur $[1;+\infty[$

$\Rightarrow \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.