Exercice 2 ⋆ On considère la suite (u_n) définie pour tout n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que $u_n \leqslant 3$.

Exercice 3 ⋆ On considère la suite (u_n) définie pour tout n par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que $u_n = 3 \times 2^n + 4$.

Exercice 5 ⋆ On considère la suite (u_n) définie pour tout n par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$$

On veut démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$.
On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :$f(x) = \dfrac{4x - 1}{x + 2}$

❶ Déterminer la dérivée f' de f et déterminer son signe sur $[1; +\infty[$.

❷ En déduire les variations de f sur $[1; +\infty[$.

❸ En déduire que si $x \geqslant 1$ alors $f(x) \geqslant 1$.

❹ En utilisant les résultats précédents, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 1$.