Correction du DS n°1

Exo 1

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n^2+2}{3+2n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2}\dfrac{\left(-1+\frac{2}{n^2}\right)}{\left(\frac{3}{n^2}+2\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\overbrace{-1+\frac{2}{n^2}}^{-1}}{\underbrace{\frac{3}{n^2}+2}_{2}} = -\dfrac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n+2}{3-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\left(-1+\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\frac{3}{\sqrt{n}}-1\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\sqrt{n}}_{+\infty}\, \dfrac{\overbrace{-1+\frac{2}{n}}^{-1}}{\underbrace{\frac{3}{\sqrt{n}}-1}_{-1}} = +\infty$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n-1}{1-3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{3^n}\dfrac{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{3^n}-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{0} \dfrac{\overbrace{1-\frac{1}{2^n}}^{1}}{\underbrace{\frac{1}{3^n}-1}_{-1}} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

car $-1<\frac{2}{3}<1$, $-1<\frac{1}{3}<1$ et $-1<\frac{1}{2}<1$

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $-1\le(-1)^n\le 1$

$\Rightarrow -3\le(-1)^n-2\le -1$

$\Rightarrow \underbrace{-\frac{3}{n}}_{\downarrow\, 0} \le \underbrace{\frac{(-1)^n-2}{n}}_{\downarrow\, 0} \le \underbrace{-\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0}$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n-2}{n}=0$

d'après le théorème des gendarmes.

Exo 2

1) On définit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$: « $u_n=(-4)^{n+1}+1$ ».

Init : $n=0$ $\quad u_0=-3$

$(-4)^{0+1}+1=-3$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons $P(n)$.

$u_{n+1}=5-4u_n=5-4\left((-4)^{n+1}+1\right)=5+(-4)^{n+2}-4=1+(-4)^{n+2}$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=(-4)^{n+1}+1$, d'après le principe de récurrence.

2) La suite u diverge car $-4<-1$.

Exo 3

1) On définit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$: « $u_n\le 4$ ».

Init : $n=0$

$u_0\le 4$ donc $P(0)$ est vraie.

* Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$.

$$u_n \leq 4$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}u_n \leq \frac{1}{4}\times 4$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}u_n + 3 \leq 4 \quad \text{donc } P(n+1) \text{ est vraie.}$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \leq 4$$

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$.

2) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $u_n \leq u_{n+1}$ ".

* Init : $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 3 = \frac{13}{4}$ donc $u_0 \leq u_1$ et $P(0)$ est vraie.

* Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$.

$$u_n \leq u_{n+1}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}u_n \leq \frac{1}{4}u_{n+1}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}u_n + 3 \leq \frac{1}{4}u_{n+1} + 3$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2} \quad \text{donc } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et u est croissante.

Correction du DM n°2

Exo 1 (6)

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4-3n^3-5 = \lim\limits_{n\to+\infty} \underset{\downarrow}{n^4}\underbrace{\left(1-\underset{\downarrow\, 0}{\frac{3}{n}}-\underset{\downarrow\, 0}{\frac{5}{n^4}}\right)}_{\downarrow\, 1} = \underline{+\infty}$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n+2}{3-n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n}{-n^2}\,\dfrac{\left(1+\frac{2}{-n}\right)}{\left(\frac{3}{-n^2}+1\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{n}}\,\dfrac{\overbrace{\left(1+\frac{2}{-n}\right)}^{1}}{\underbrace{\left(\frac{3}{-n^2}+1\right)}_{1}} = \underline{0}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n^2+2}{3+2n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n^2}{2n^2}\left(\dfrac{1+\frac{2}{-n}}{\frac{3}{2n^2}+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\overbrace{1-\frac{2}{n}}^{1}}{\underbrace{\frac{3}{2n^2}+1}_{1}}\right) = \underline{-\dfrac{1}{2}}$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \underline{5}$ car $\underline{-1<\dfrac{1}{2}<1}$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n-1}{1-2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n}{2^n}\left(\dfrac{1-\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{2^n}-1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \underset{\downarrow\, +\infty}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}\left(\dfrac{\overbrace{1-\frac{1}{3^n}}^{1}}{\underbrace{\frac{1}{2^n}-1}_{-1}}\right) = \underline{-\infty}$

car $\underline{\dfrac{3}{2}>1}$ et $\underline{-1<\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}<1}$.

6) $-1\le(-1)^n\le 1 \Rightarrow -5\le 5(-1)^n\le 5 \Rightarrow -3\le 5(-1)^n+2\le 7$

$\Rightarrow \underset{\downarrow\, 0}{-\dfrac{3}{n}} \le \underset{\downarrow\, 0}{\dfrac{5(-1)^n+2}{n}} \le \underset{\downarrow\, 0}{\dfrac{7}{n}}$ donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5(-1)^n+2}{n} = 0}$

d'après le théorème des gendarmes.

Exo 2 (4)

On définit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$: « $0<u_n<1$ »

* Init : $u_0=\dfrac{1}{2}$ donc $P(0)$ est vraie.
* Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons $P(n)$.

$0<u_n<1$

$\Rightarrow 1\le u_n+1<2$

$0<u_n<1$

$\Rightarrow 2<u_n+2<3$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}>u_n+2>\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}<u_n+2<\dfrac{1}{2}$

Méthode 1

$\Rightarrow 1\times\frac{1}{3} < (u_n+1)\times\frac{1}{u_n+2} < 2\times\frac{1}{2}$

Suite Méthode ①

$\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{u_n+1}{u_n+2} < 1$ Or $0 < \frac{1}{3}$

donc $0 < u_{n+1} < 1$ donc P(n+1) est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

Soit $f : x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f'(x) = \frac{1(x+2) - 1(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$

donc f est strictement croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;+\infty[$

2ième méthode : Reprise de l'hérédité :

$0 < u_n < 1$

Méthode ②

$\Rightarrow f(0) < f(u_n) < f(1)$ car f est croissante sur $]0;1[$

$\Rightarrow \frac{1}{2} < u_{n+1} < \frac{2}{3}$ Or $\frac{1}{2} > 0$ et $\frac{2}{3} < 1$

donc $0 < u_{n+1} < 1$.

Exercice 3 ③

1) $u_2 = 5u_1 - 6\times u_0 = 4 = 2^2$; $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 8$; $u_4 = 5u_3 - 6u_2 = 16$

2) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$ "

* $n=0$: $u_0 = 1 = 2^0$; $u_1 = 2 = 2^1$ donc P(0) est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$. On sait que $u_{n+1} = 2^{n+1}$.

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5\times 2^{n+1} - 6\times 2^n = 2^n(10-6) = 2^n\times 4$

$= 2^n \times 2^2 = 2^{n+2}$ donc P(n+1) est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$