EVA2 - Correction

Exo 1

1) $u_1 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{arrivée} \\ \text{de 80} \\ \text{cétacés}}}{(3000+80)} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Baisse de} \\ 5\%}}{0,95} = \underline{2926}$ 0,5

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{arrivée} \\ \text{de 80} \\ \text{cétacés} \\ \text{annuelle}}}{80}) \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Baisse} \\ \text{de 5\%}}}{0,95} = \underline{0,95\, u_n + 76}$ 0,5

3) C2 = B2*0.95 +76 1

4) a) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $u_n \geq 1520$ ".

- $u_0 = 3000 \geq 1520$ donc $P(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$.

$u_n \geq 1520$

$\Rightarrow 0,95\, u_n \geq 0,95 \times 1520$ 2

$\Rightarrow 0,95\, u_n + 76 \geq 1444 + 76$

$\Rightarrow u_{n+1} \geq 1520$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1520$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,95\, u_n + 76 - u_n$

$= -0,05\, u_n + 76$

Or $u_n \geq 1520 \Rightarrow -0,05\, u_n \leq -0,05 \times 1520$ 1

$\Rightarrow -0,05\, u_n + 76 \leq 0$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$

donc u est décroissante.

c) u est décroissante et minorée par 1520 donc elle converge d'après le théorème de convergence monotone. 1

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0,95\, u_n + 76 - 1520$ 1

$= 0,95\, u_n - 1444 = 0,95\,(u_n - 1520) = \underline{0,95\, v_n}$.

donc v est géométrique de raison 0,95 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1520 = 1480$ 1

b) De 5 a) on a $v_n = 1480\,(0,95)^n$ donc $u_n = 1480\,(0.95)^n + 1520$

c) $-1 \leq 0,95 \leq 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,95)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1520$. 1

6) Tant que $u \geqslant 2000$
$n \leftarrow n+1$
$u \leftarrow 0{,}95 \times u + 76$ 1

7) $n = 22$. Car $u_{22} \leqslant 2000$ et $u_{21} > 2000$ 1

Exo 2

A. 1) $u_1 = -\frac{1}{2} u_0^2 + 3u_0 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} 2^2 + 3 \times 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

$u_2 = -\frac{1}{2} u_1^2 + 3u_1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2} = -\frac{25}{8} + \frac{15}{2} - \frac{3}{2} = \frac{23}{8}$ 1

2) $u_3 = 2{,}99219$ à 10^{-5} près.
$u_4 = 2{,}99997$ à 10^{-5} près 1

3) u semble croissante et convergente vers 3. 0,5

B) 1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2} u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} - 3$

$= -\frac{1}{2} u_n^2 + 3u_n - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}(u_n^2 - 6u_n + 9) = -\frac{1}{2}(u_n - 3)^2$ 1

$= -\frac{1}{2} v_n^2$.

2) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $-1 \leq v_n \leq 0$ ».

* $v_0 = u_0 - 3 = -1$ donc $-1 \leq v_0 \leq 0$ et $P(0)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$.

$-1 \leq v_n \leq 0$

$\Rightarrow 1 \geqslant v_n^2 \geqslant 0$ 2

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} v_n^2 \leq 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq v_{n+1} \leq 0$ or $-\frac{1}{2} > -1$

donc $-1 \leq v_{n+1} \leq 0$ et $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq v_n \leq 0$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2} v_n^2 - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2} v_n + 1\right)$ 1

b) $-1 \leq v_n \leq 0 \Rightarrow -v_n \geqslant 1$

$-1 \leq v_n \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} v_n \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} v_n + 1 \leq 1$

donc $-v_n \left(\frac{1}{2} v_n + 1\right) \geqslant 0$ et v est croissante. 1

4. v est croissante et majorée par 1 donc elle converge d'après le théo. de convergence monotone. 1

5) $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2 \Leftrightarrow \ell(1 + \frac{1}{2}\ell) = 0$

$\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = -2$ 1

Or $-1 \leq u_n \leq 0$ donc $\ell = 0$

6) $v_n = u_n - 3$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ donc

$\lim_{n \to +\infty} u_n = 3$ donc u converge vers 3.

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - 3 - (u_n - 3) = u_{n+1} - u_n$ 1

donc v et u ont même sens de variation

donc u est croissante.