Exemple 2.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$ " $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ "

Init $n=1$

$$\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = 1 \; ; \; \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$$

donc $P(1)$ est vraie

rec Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2$$

$$= 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

Brouillon :

C	⊄
$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$P(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

D'après $P(n)$

$$= \frac{n(2n^2 + n + 2n + 1) + 6(n^2 + 2n + 1)}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 9n + 4n + 6}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

$P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$