Exemple 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$P(n)$: " $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_n \leqslant 1$ ".

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 1$

$$u_1 = \sqrt{\frac{1+0}{2}}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_1 \leqslant 1$$

Donc $P(1)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$

Montrons $P(n+1)$.

<u>Brouillon</u> :

$\subset$	$\not\subset$
$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ $u_0 = 0$ $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$

D'après $P(n)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 1 + u_n \leq 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} \leq \frac{1+u_n}{2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} \leq \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \leq 1, \quad \text{Or } \frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

donc $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_{n+1} \leq 1$ et $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$.