

Exemple 7.

Montrer que la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$ est minorée.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) : "u_n \geq 0"$.

Init : $n=1$ $u_1 = 5 \geq 0$ donc $P(1)$ vraie.

Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(m)$.

$$u_m \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{u_m + 2} \geq \sqrt{2}$$

$\Rightarrow u_{m+1} \geq \sqrt{2}$ Or $\sqrt{2} > 0$ donc $u_{m+1} > 0$ et $P(m+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$.