Exercice 1

Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$, $1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(n) = \text{"} \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \text{"}$$

Initialisation : $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1(1+1) = 2 \; ; \; \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$$

donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$.

Montrons $P(n+1)$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+1+1)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{d'après } P(n)}}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$

$$= \frac{n(n^2+3n+2) + 3(n^2+3n+2)}{3}$$

$$= \frac{n^3+3n^2+2n+3n^2+9n+6}{3}$$

$$= \frac{n^3+6n^2+11n+6}{3}$$

$$\frac{(n+1)(n+1+1)(n+2+1)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} = \frac{(n^2+3n+2)(n+3)}{3}$$

$$= \frac{n^3+3n^2+2n+3n^2+9n+6}{3} = \frac{n^3+6n^2+11n+6}{3}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.