Exercice 2.

Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n! = (n+1)! - 1$.

on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: " $\sum_{k=1}^{n} k \times k!$

$= (n+1)! - 1$

initialisat° pour $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} 1 \times 1! = 1$ et $(1+1)! = 2-1$

$= 1$

donc $P(1)$ est vraie

hérédité soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons $P(n)$, montrons $P(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} k \times k! + (n+1) \times (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)!$$

$$= (n+1)!\,(n+1+1) - 1 = (n+1)!\,(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$$

et

$(n+1+1)! - 1 = (n+2)! - 1$ donc $P(n+1)$ est vraie

par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k\,k! = (n+1)! - 1$