

Exercice 3

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P(n): "u_n \geq n^2"$$

Initialisation: Pour $n=0$

$$u_0 = 1 \quad 0^2 = 0$$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$,
 Montrons $P(n+1)$

$$\text{D'après } P(n): u_n \geq n^2$$

$$u_{n+2n} \geq n^2 + 2n$$

$$u_{n+2n+1} \geq n^2 + 2n + 1$$

$$u_{n+1} \geq (n+1)^2$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq n^2$