Exercice 4.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$

Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 2$.

Aide : Vous pouvez utiliser les variations de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = 0 < u_n < 2$

Initialisation :

$P(0)$: $0 < u_0 < 2$ est vraie car $u_0 = 1$

Récurrence : ~~pour tout~~ $n \in \mathbb{N}$ supposons $P(n)$

$\boxed{\text{Soit } n \in \mathbb{N}}$

$$0 < u_n < 2$$
$$\Rightarrow 1 < u_n + 1 < 3$$
$$\Rightarrow 0 < 1 < \sqrt{u_n+1} < \sqrt{3} < 2$$

Or $0 < 1$ et $\sqrt{3} < 2$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{u_n+1} < 2$$
$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 2$$

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$

Variation : $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$, pour $x \in [-1 ; +\infty[$

Rappel : $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+ = [0 ; +\infty[$

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* =]0 ; +\infty[$.

$f(x) = \sqrt{x+1}$, $x \in [-1 ; +\infty[$.

Soit $x \in]-1 ; +\infty[$,

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ $\qquad (\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u = x+1$ et $u' = 1$

x	-1	$+\infty$
1		$+$
$2\sqrt{x+1}$		$+$
$f'(x)$		$+$
f		$\nearrow$

Retour sur la récurrence précédente.
Nouvelle méthode sur l'hérédité.

$$0 < u_n < 2$$
$$\Rightarrow f(0) < f(u_n) < f(2) \text{ car } f \text{ est croissante.}$$
$$\Rightarrow 1 < u_{n+1} < \sqrt{3}$$

Suite identique

Brouillon

$f(0) = \sqrt{0+1} = 1$

$f(u_n) = \sqrt{u_n + 1} = u_{n+1}$