Exercice 6.

La suite (u_n) est définie par $u_0 \in]0;1[$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n(2-u_n)$.\\ Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: "$0<u_n<1$".

Init :

* $u_0 \in]0;1[$, $P(0)$ est vraie

* Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ est vraie.

$0<u_n<1$

$\Rightarrow f(0)<f(u_n)<f(1)$ car f est strictement croissante sur $]0;1[$.

Or $f(0)=0(2-0)=0$

$f(1)=1(2-1)=1$

$f(u_n)=u_n(2-u_n)=u_{n+1}$

Etude de fonction :

$f : x \longmapsto x(2-x)$

$f'(x)=(x)'(2-x)+x(2-x)'$

$=2-x-x=2-2x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

donc $0<u_{n+1}<1$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0<u_n<1$.