Exercice 11.

Déterminez, si elle existe, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ des sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$
2. $S_n = 0,6 + 0,6^2 + \ldots + 0,6^n$

1) Soit $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3^k} = \frac{1^k}{3^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$

$\left(\frac{1}{3}\right)^k$ est une suite géo. de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 1$

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1+1}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$

$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{1-1/3} = \dfrac{1}{2}$

car $-1 < \frac{1}{3} < 1$ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0\right)$

2) Soit $k \in \mathbb{N}$, $0,6^k$

$0,6^k$ est une suite géometrique de raison 0,6 et de premier terme $u_0 = 1$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n =$

$S_n = u_1 \times \dfrac{1 \times 0,6^{n-1+n}}{1-0,6} = 0,6 \times \dfrac{1-0,6^n}{1-0,6}$ $\neq$ $0,6 \times \dfrac{1}{1-0,6} = 1,5$

car $-1 < 0,6 < 1$ $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^n = 0\right)$.