Exercice 14.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Démontrez que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 2$.
2. Prouvez que la suite (u_n) est strictement croissante.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ " $0 \leqslant u_n \leqslant 2$

Initialisation : $P(0)$: $u_0 = 1$; $0 \leq 1 \leq 2$

$P(0)$ est vraie

Récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$

$$0 \leqslant u_n \leqslant 2$$
$$2 \leqslant u_n + 2 \leqslant 4$$
$$\sqrt{2} \leqslant \sqrt{u_n+2} \leqslant \sqrt{4}$$

donc $\sqrt{2} \geqslant 0$ et $\sqrt{4} = 2$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, " $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ " $u_{n+1} \geqslant u_n$

Initialisation : $n = 0$, $u_1 = \sqrt{u_0+2} = \sqrt{3}$, $u_0 = 1$

$u_1 > u_0$ donc $P(0)$ est vraie.

Récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$

$$u_n \leqslant u_{n+1}$$
$$u_n + 2 \leqslant u_{n+1} + 2$$
$$\sqrt{u_n+2} \leqslant \sqrt{u_{n+1}+2}$$
$$u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, u est croissante.

$\boxed{\text{Ou}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n+2} - u_n = \frac{(\sqrt{u_n+2} - u_n)(\sqrt{u_n+2} + u_n)}{\sqrt{u_n+2} + u_n}$$

$$= \frac{\sqrt{u_n+2}^2 - u_n^2}{\sqrt{u_n+2} + u_n} = \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n+2} + u_n}$$

Étude de $-x^2 + x + 2$

$\Delta = 1 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2 \times (-1)} = -1$ ou $x_2 = 2$

x		-1		2	
$-x^2+x+2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Or $u_n \in [0;2]$ donc $u_n + 2 - u_n^2 > 0$

et u est croissante.

3) u est croissante et majorée par 2 donc u converge d'après le théorème de convergence monotone.

Notons ℓ la limite de u.

$u_{n+1} = \sqrt{u_n+2} \Rightarrow \ell = \sqrt{\ell+2}$ ⚠

$\Rightarrow \ell^2 = \ell + 2$

$\Rightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$

$\ell_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2} = -1$ ou $\ell_2 = 2$

Or $0 \leqslant u_n \leqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$ donc u tend vers 2.