Exercice 15.

On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Donnez la forme algébrique de j^2.
2. Déterminer le discriminent du polynôme : $X^2 + X + 1$.
3. Vérifiez que $1 + j + j^2 = 0$.

1) $j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 \times -\frac{1}{2}\right) i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= +\frac{1}{4} + -1 i\frac{\sqrt{3}}{2} + i^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= +\frac{1}{4} + -1 i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}$

$= \frac{-2}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $X^2 + X + 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1$

$= 1 - 4$

$= -3$

Pas de solution réelle.

3) $1 + j + j^2 = 1 + \left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{i\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)$

$1 + j + j^2 = \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{\sqrt{3}i}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{\sqrt{3}i}{2}} = 0$