Exercice 16.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ et $v_n = \frac{1}{n}$.

1. Prouvez que 1 est un majorant de la suite (u_n).
2. Prouvez que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n < v_n$.
3. De ces deux renseignements, lequel permet de déterminer le comportement de la suite (u_n) en $+\infty$?

1) 1ière méthode :

$n \geqslant 1$

$\Rightarrow n^2 \geqslant 1$

$\Rightarrow n^2+1 \geqslant 2$

$\Rightarrow \sqrt{n^2+1} \geqslant \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$

Or $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant 1$

donc $u_n \leqslant 1$

2ième méthode

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$u_n - 1 = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - 1$

$= \frac{1-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{(1-\sqrt{n^2+1})(1+\sqrt{n^2+1})}{(1+\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+1})}$

$= \frac{1^2 - \sqrt{n^2+1}^2}{(1+\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+1})} = \frac{1-n^2-1}{(1+\sqrt{n^2+1})\sqrt{n^2+1}}$

$= \frac{-n^2}{(1+\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+1})} \leqslant 0$ car $-n^2 \leqslant 0$ et $(1+\sqrt{n^2+1})\sqrt{n^2+1} > 0$

u est majorée par 1.

2) $n \in \mathbb{N}^*$

$n^2+1 > n^2$

$\Rightarrow \sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2}$

$\Rightarrow \sqrt{n^2+1} > n$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow u_n < v_n$

$u_n - v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{1}{n} = \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n\sqrt{n^2+1}}$

$= \frac{(n-\sqrt{n^2+1})(n+\sqrt{n^2+1})}{(n+\sqrt{n^2+1})(n\sqrt{n^2+1})} = \frac{n^2-(\sqrt{n^2+1})^2}{(n+\sqrt{n^2+1})n\sqrt{n^2+1}}$

$= \frac{n^2-n^2-1}{(n+\sqrt{n^2+1})n\sqrt{n^2+1}} = \frac{-1}{(n+\sqrt{n^2+1})n\sqrt{n^2+1}} < 0$

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{n^2+1}}_{+\infty}} = 0$

Ce n'est pas 1 car on ne sait pas si il est croissant (convergence monotone)

Ce n'est pas 2 il nous manque une inégalité (théorème des gendarmes)