b. Déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{25}{4}(\frac{1}{3})^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$$

v_n géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1ier terme

$v_n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\quad v_0 = -\frac{25}{2}$

$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$$

$$2u_n = +\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3n - \frac{21}{2}$$

$$u_n = \frac{\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right) + 3n - \frac{21}{2}}{2}$$

$$u_n = \left(\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3n - \frac{21}{2}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

géométrique

$$u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$ arithmétique.

Soit (g_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1ier terme $\frac{25}{4}$.

Soit (a_n) la suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ et de 1ier terme $-\frac{21}{4}$.

On observe : $u_n = g_n + a_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = g_0 + a_0 + g_1 + a_1 + \dots + g_n + a_n$$

$$= g_0 + g_1 + \dots + g_n + a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$$= g_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{(n+1)(a_0 + a_n)}{2}$$

$$= \frac{25}{4} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{(n+1)\left(-\frac{21}{4} + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right)}{2}$$