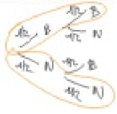
Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On en prélève n ($n \geq 2$) au hasard, successivement et avec remise.

1. a. Calculer les probabilités des événements : "Toutes les boules tirées sont de la même couleur", "Il y a exactement une boule blanche".



Cas $n=2$

$P(\text{"Toutes de la même couleur"})$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^2$

Dans le cas général la proba cherchée est $2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$P(\text{"Une seule boule blanche"}) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

b. On considère les événements :

- A: "On obtient des boules des deux couleurs",
- B: "On obtient au plus une boule blanche".

Déduisez-en les probabilités suivantes :

$$P(A \cap B) = \frac{n}{2^n},\ P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}},\ P(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

b) $A \cap B$ = "On obtient une boule blanche exactement"

donc $P(A \cap B) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n = n\,\frac{1^n}{2^n} = n\,\frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^n}$

$\bar{A}$ = "On obtient des boules de même couleur"

donc $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - 2\,\frac{1^n}{2^n}$

$= 1 - 2 \times \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{2}{2^n} = 1 - \frac{2^1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$

B = "On obtient aucune boule blanche" $\cup$ "On obtient une seule boule blanche"

$P(B) = P(\text{"aucune boule blanche"}) + P(\underbrace{\text{"une seule boule blanche"}}_{= A \cap B})$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{2^n}$

$= \frac{1^n}{2^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{1+n}{2^n}$

2) A et B indépendants

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow \cancel{2^n}\frac{n}{\cancel{2^n}} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\frac{n+1}{\cancel{2^n}}\right) \times 2^n$

$\Leftrightarrow n = \left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\right)(n+1)$

$\Leftrightarrow 2^{n-1} n = \frac{(2^{n-1}-1)(n+1)}{\cancel{2^{n-1}}} \cancel{2^{n-1}}$

$\Leftrightarrow 2^{n-1} n = (2^{n-1} - 1)(n+1)$

$\Leftrightarrow \cancel{2^{n-1} n} = \cancel{n 2^{n-1}} + 2^{n-1} - n - 1$

$\Leftrightarrow 0 = 2^{n-1} - n - 1$

$\Leftrightarrow n+1 = 2^{n-1}$

3) b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1-1} - (n+1) - (2^{n-1} - (n+1))$

$= 2^n - n - 2 - 2^{n-1} + n + 1$

$= 2^n - 2^{n-1} - 1 = 2 \times 2^{n-1} - 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} - 1$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$= 2^n\left(\frac{2^n}{2^n} - \frac{2^{n-1}}{2^n}\right) - 1$

$= 2^n(1 - 2^{n-1-n}) - 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$= 2^n(1 - 2^{-1}) - 1$

$a^1 = a$

$= 2^n\left(1 - \frac{1}{2}\right) - 1$

$= 2^n \times \frac{1}{2} - 1$

$= 2^{n-1} - 1 \leftarrow 2^n \times \frac{1}{2} = \overbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2 \times 2 \times 2}^{n} \times \frac{1}{2} = 2^{n-1}$

$n \geq 2 \Rightarrow n-1 \geq 1 \Rightarrow 2^{n-1} \geq 2^1$

$\Rightarrow 2^{n-1} - 1 \geq 2 - 1$

$\Rightarrow 2^{n-1} - 1 \geq 1$

donc u est croissante.

4) A et B indépendants $\Leftrightarrow 2^{n-1} = n+1$

$\Leftrightarrow 2^{n-1} - (n+1) = 0$

$\Leftrightarrow u_n = 0$

Or $u_4 = 3$ et u est strictement croissante.

donc $u_n \neq 0$ pour $n \geq 4$

Or $u_2 = -1$ et $u_3 = 0$

A et B sont indépendants si $n = 3$.