Ex 20 :

2. Prouvez par récurrence que :

pour tout n de $\mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$

Initialisation pour $n=0$ :

$u_0 = 1$ $\qquad u_1 = \frac{1}{10} 1(20-1)$

$u_1 = 1,9$

donc $P_0$ est vrai

Étape de récurrence

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$

$\Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(10)$ car $f$ est croissante sur $[0;10]$.

$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$

donc $P(n+1)$ est vraie

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

3. Prouvez que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminez sa limite $l$. ( On admettra que cette limite est solution de l'équation $f(x) = x$.)

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$

donc

La suite $(u_n)$ est majorée par 10. et est croissante.

Le théorème convergence monotone montre que $u$ converge

Résolvons $f(x) = x$

$\Leftrightarrow \frac{x}{10}(20-x) = x$

$\Leftrightarrow \frac{20x}{10} - \frac{x^2}{10} - x = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{x^2}{10} + 2x - x = 0$

$\Rightarrow \frac{-x^2}{10} + x = 0$ $\qquad \Delta =$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 10$

On sait que $u$ converge vers $\ell$.

$f(\ell) = \ell$.

$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = 10$

$u_0 = 1$ et $u$ est croissante donc elle converge vers 10.