1. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$; en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. $f(x) = \sqrt{x+\frac{1}{x}}$; en $+\infty$ et en 0.
3. $f(x) = \sqrt{\frac{4x-1}{x+3}}$; en $+\infty$.
4. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{3-2x}}$; en $-\infty$ et en $\frac{3}{2}$.
5. $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$; en 4.
6. $f(x) = (x-\sqrt{x}+\frac{1}{x})^3$; en $+\infty$.

---

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{x} + \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{x}}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{\underset{\substack{\downarrow\\0}}{x} + \underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{\frac{1}{x}}} = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4x-1}{x+3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4\cancel{x}(1-\frac{1}{4x})}{\cancel{x}(1+\frac{3}{x})}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4(1-\frac{1}{4x})}{1+\frac{3}{x}}} = \sqrt{4} = 2$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{x^2}{3-2x}}$

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} x^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} 3-2x = 3-2\left(\frac{3}{2}\right) = 0^+$

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} \frac{x^2}{3-2x} = +\infty$

x	$-\infty$	0		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
x^2	+		+		+
$3-2x$	+		+	0	−
$\frac{x^2}{3-2x}$	+	0	+	‖	−

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{x^2}{3-2x}} = +\infty$ $\quad$ $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale en $\frac{3}{2}$

4) $\sqrt{\frac{x^2}{3-2x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2}{3-2x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x^2\left(\frac{x^2}{x^2}\right)}{x\left(\frac{3}{x}-\frac{2x}{x}\right)}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x(1)}{\underbrace{\left(\frac{3}{x}-2\right)}_{-2}}} = +\infty.$

5) $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$

$\lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$

$\lim\limits_{x\to4} \sqrt{x}-2 = 0$

$\lim\limits_{x\to4} \sqrt{x+5}-3 = 0$

$\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)(\sqrt{x}+2)}$

$\frac{((\sqrt{x})^2-2^2)(\sqrt{x+5}+3))}{((\sqrt{x+5})^2-3^2)(\sqrt{x}+2)).}$

$= \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(x+5-9)(\sqrt{x}+2).}$

4

$= \frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x+5}+3)}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}$

$= \frac{(\sqrt{x+5}+3}{(\sqrt{x}+2}$

$\lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^3 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{x}\underbrace{\left(1-\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}+\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{x^2}}\right)}_{1}\right)^3 = +\infty$