Exercice 22

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$ par

$$f(x)=\frac{x^2-5}{2x+3}.$$

1. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$ par

$$f(x)=\frac{x^2-5}{2x+3}.$$

2. Vérifiez qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $x\neq-\frac{3}{2}$, $f(x)=ax+b+\frac{c}{2x+3}$.
3. Montrez que la droite D d'équation $y=ax+b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ en $-\infty$.
4. Étudiez la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}\left(\frac{1-\frac{5}{x^2}}{2+\frac{3}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\times x}{\cancel{x}\times 1}\left(\frac{1-\frac{5}{x^2}}{2+\frac{3}{x}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{x}_{+\infty}\left(\frac{\overbrace{1-\frac{5}{x}}^{1}}{\underbrace{2+\frac{3}{x}}_{2}}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}} x^2-5=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-5=\frac{9}{4}-5=-\frac{11}{4}$

x		$-\frac{3}{2}$	
$2x+3$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-} 2x+3=0^-$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+} 2x+3=0^+$

donc $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}^+} f(x)=-\infty$

2) Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$, $ax+b+\frac{c}{2x+3}$

$=\frac{(ax+b)(2x+3)+c}{2x+3}=\frac{2ax^2+3ax+2bx+3b+c}{2x+3}$

Or $f(x)=\frac{x^2-5}{2x+3}$

donc $\begin{cases}2a=1\\3a+2b=0\\3b+c=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-\frac{3}{4}\\c=-\frac{11}{4}\end{cases}$ $\quad f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}-\frac{11/4}{2x+3}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\cancel{\frac{1}{2}x}\cancel{-\frac{3}{4}}-\frac{11/4}{2x+3}-\left(\cancel{\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{11/4}{2x+3}=0$

De même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)=0$

$\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une AO d'équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$.

c) Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$, $f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)=-\frac{11/4}{2x+3}$

x		$-\frac{3}{2}$	
$-11/4$	$-$		$-$
$2x+3$	$-$	0	$+$
$f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)$	$+$	$\|\|$	$-$

$\mathcal{C}_f$ est au dessus de D sur $]-\infty\,;-\frac{3}{2}[$ et est en dessous sur $]-\frac{3}{2}\,;+\infty[$.