Exercice 24.

f et g sont deux fonctions définies sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, précisez si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

1. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim x \to +\infty g(x) = +\infty$, alors
$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$
2. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim x \to +\infty g(x) = 0$, alors
$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$
3. Si pour tout $x \geq 1$, $g(x) - f(x) \leq 0$, et $\lim x \to +\infty g(x) = +\infty$, alors $\lim x \to +\infty f(x) = +\infty$
4. Si $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
5. Si $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
6. Si $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, alors il existe $a \in [1;+\infty[$ tel que pour tout $x \in [a;+\infty[$, $f(x) = g(x)$.

1) $f(x) = 2x \quad g(x) = \sqrt{x}$ F

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

2) $f(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/x}{1/x^2} = \frac{1}{x} \times x^2 = x$

$\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ F

3) $g(x) - f(x) \leq 0 \iff g(x) \leq f(x)$ V

$g(x) \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$

4) $f(x) = 3 \quad g(x) = \frac{1}{x}$ F

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{\frac{1}{x}} = 3 \times x = 3x \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

5) $f(x) = 1$, $g(x) = x$ F

$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

6) $f(x) = x \quad g(x) = x+1$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x+1} = \frac{\cancel{x}(1)}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

$f(x) - g(x) = x - (x+1) = -1 \neq 0$ F

C_f et C_g n'ont pas de point en commun.