1) Soit $f : x \mapsto x^3 + x^2$ définie sur $[1;2]$

$f'(x) = 3x^2 + 2x > 0$ sur $[1;2]$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4^2 - 4 \times 3 \times 0$

$= 4 - 0$

$= 4$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{4}}{2\times 3} = -\frac{2}{3}$

$x_2 = \frac{-2+2}{6} = 0$

x		$-\frac{2}{3}$		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

f est strictement croissante sur $[1;2]$.

f est continue sur $[1;2]$

f est strictement croissante sur $[1;2]$

$f(1) = 2$

$f(2) = 12$

$5 \in [2;12]$ (ou $5 \in [f(1);f(2)]$)

Le corollaire du T.V.I. montre qu'il existe une unique solution α à $f(x) = 5$ sur $[1;2]$

Avec la calculatrice on constate que

$\alpha \in [1{,}43;1{,}44]$

2) Soit $f : x \mapsto \sqrt{1+2x} - x$

f est dérivable sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$.

Soit $x \in]-\frac{1}{2};+\infty[$,

$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{1+2x}} - 1$

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$u = 1+2x$

$u' = 2$

$= \frac{1}{\sqrt{1+2x}} - 1 = \frac{1-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1+2x}} = \frac{(1-\sqrt{1+2x})(1+\sqrt{1+2x})}{\sqrt{1+2x}(1+\sqrt{1+2x})}$

$= \frac{1-(\sqrt{1+2x})^2}{\sqrt{1+2x}(1+\sqrt{1+2x})} = \frac{1-(1+2x)}{\sqrt{1+2x}(1+\sqrt{1+2x})} = \frac{-2x}{\sqrt{1+2x}(1+\sqrt{1+2x})}$

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$	
$\sqrt{1+2x}(1+\sqrt{1+2x})$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$f(0) = \sqrt{1+2x} - x = 1$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+2x} - x$

$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sqrt{1+2x}}{x} - 1\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{x^2}} - 1\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{1+2x}{x^2}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{x^2}} - 1\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\Big(\underbrace{\sqrt{\underbrace{\tfrac{1}{x^2}+\tfrac{2}{x}}_{0}} - 1}_{-1}\Big) = -\infty$

f est continue sur $[0;5]$

f est strictement décroissante sur $[0;5]$

$f(0) = 1$

$f(5) = \sqrt{1+2\times 5} - 5 = \sqrt{11} - 5 < 0$

$0 \in [f(5);f(0)]$

Le corollaire du TVI montre qu'il existe une unique solution α

dans $[0;5]$ à $f(x) = 0$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \in [2{,}41;2{,}42]$

3) Soit $f : x \mapsto \frac{x-1}{1+x^2} - x$, définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \frac{1(1+x^2)-(x-1)(2x)}{(1+x^2)^2} - 1$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$= \frac{1+x^2-2x^2+2x}{(1+x^2)^2} - 1 = \frac{-x^2+2x+1}{(1+x^2)^2} - 1 = \frac{-x^2+2x+1-(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}$

$= \frac{-x^2+2x+1-1-2x^2-x^4}{(1+x^2)^2}$

$= \frac{-3x^2+2x-x^4}{(1+x^2)^2} = \frac{x(-x^3-3x+2)}{(1+x^2)^2}$

On admet que f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

On admet que f a un maximum négatif sur $[0;+\infty[$.

f est continue sur $]-\infty;0]$

f est strict. $\searrow$ sur $]-\infty;0]$

$f(0) = \frac{0-1}{1+0^2} - 0 = -1$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{1+x^2} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x^2(\frac{1}{x^2}+1)} - x = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\Bigg(\frac{\overbrace{1-\frac{1}{x}}^{1}}{\underbrace{\frac{1}{x^2}+1}_{1}}\Bigg) \underbrace{-x}_{+\infty}$

$0 \in \left]\lim_{x\to-\infty} f(x); f(0)\right]$

Le corollaire du TVI montre qu'il existe une unique solution α à $f(x) = 0$ sur $]-\infty;0]$.

La calculatrice donne $\alpha \approx -1$.

Mais on admet qu'une solution sur $\mathbb{R}$.