Étudier, dans chaque cas, la limite éventuelle.

1. $u_n = n^2 - 3n$
2. $u_n = n\sqrt{n} - n^2$
3. $u_n = 3^n - 2^n$
4. $u_n = \frac{5^n-1}{4^n+3}$
5. $u_n = \frac{2n+3}{3n-1}$
6. $u_n = \frac{5n-3}{3n-5}$
7. $u_n = \frac{2n+3}{3n^2-1}$
8. $u_n = \frac{5+\cos(n)}{n}$
9. $u_n = \frac{2+5(-1)^n}{n}$
10. $u_n = \frac{10n-1}{n^2+1}$
11. $u_n = \frac{2n^2-1}{3n+7}$

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-3n = \lim\limits_{n\to+\infty} n(n-3) = +\infty$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}-n^2 = n^2\left(\frac{n\sqrt{n}}{n^2}-1\right)$

$= n^2\left(\frac{\sqrt{n}}{n}-1\right)$

$= n^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right) = -\infty$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{3n-1}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n\left(1+\frac{3}{2n}\right)}{3n\left(1-\frac{1}{3n}\right)}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{3}\,\frac{\left(1+\frac{3}{2n}\right)}{\left(1-\frac{1}{3n}\right)} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} \to \frac{2}{3}$, $1 \to 1$, $\frac{3}{2n} \to 0$, $\frac{1}{3n} \to 0$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n}\left(\frac{5-\frac{3}{n}}{3-\frac{5}{n}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5-\frac{3}{n}}{3-\frac{5}{n}}\right) = \frac{5}{3}$

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n^3}\left(\frac{2n+3}{\frac{3n^2}{n^3}-\frac{1}{n^3}}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{1}{n^3}}\right) = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n-2^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = +\infty$

$3^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ car $3>1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $-1<\frac{2}{3}<1$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5^n-1}{4^n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n \frac{\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}{\left(1+\frac{3}{4^n}\right)}$

$= +\infty$

$\left(\frac{5}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ car $\frac{5}{4}>1$

8) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5+\cos(n)}{n}$

$-1 \leq \cos(n) \leq 1$

$-1+5 \leq 5+\cos(n) \leq 1+5$

$\frac{4}{n} \leq \frac{5+\cos(n)}{n} \leq \frac{6}{n}$

$\frac{4}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\frac{5+\cos(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\frac{6}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5+\cos(n)}{n} = 0$

D'après le théorème des gendarmes