Exercice 8.

Etudier le comportement à l'infini des suites u, v et w définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{3n^2-4}{n+1},\ v_n = \frac{u_n}{n},\ \text{et } w_n = u_n - 3n.$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-4}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(\frac{3n^2}{n^2}-\frac{4}{n^2}\right)}{n\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1}\,\frac{\left(3-\frac{4}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = +\infty \text{ car } \lim_{n\to+\infty} 3-\frac{4}{n^2} = 3 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3n^2-4}{n+1}}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-4}{n+1} \times \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-4}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-4}{n^2+n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(\frac{3n^2}{n^2}-\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} 1\,\frac{\left(3-\frac{4}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 1\,\frac{\left(3-\frac{4}{n^2}\right)\to 3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 1} = \lim_{n\to+\infty} 3$$

$$1 \downarrow 1$$

$$w_n = u_n - 3n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-4}{n+1} - \frac{3n(n+1)}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-4-3n(n+1)}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-4-3n^2-3n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-4-3n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\frac{-4}{n}-\frac{3n}{n}\right)}{n\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} 1\,\frac{\overbrace{\frac{-4}{n}-3}^{-3}}{\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{1}} = -3$$