Démonstration

Existence du couple $(q;r)$

Soit q la partie entière du quotient $\frac{a}{b}$. L'entier q est défini par l'encadrement .. q .. $\leq \frac{a}{b}$ < .. $q+1$ ..

Puisque $b > 0$, on en déduit que .. bq ... $\leq a$< .. $bq+b$ ..*

On pose alors $r = a - bq$. Ainsi $a =$ .. $bq+r$ ... et d'après *, ... 0 ..... $\leq a - bq$ < ... b ....

soit .. $0 \leq r < b$ ......

Unicité du couple $(q;r)$

On suppose qu'il existe deux couples d'entiers naturels $(q;r)$ et $(q';r')$ vérifiant simultanément :

$a = bq + r = bq' + r'$ avec $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$.

On en d\'eduit que $r - r' =$ $a - bq - (a - bq')$ $=$ .. $b(q'-q)$ .... donc $r - r'$ est multiple de .. b ..

Or, $0 \leq r < b$ et .. $-b$. $< -r' \leq$ .. 0 .. donc, par addition membre à membre, on obtient
.. $-b$. $< r - r' <$ .. b ..

Le seul multiple de b dans $]-b;b[$ est .. 0 .. donc $r - r' =$ .. 0 .. soit .. $r = r'$ ....

Comme $r - r' = b(q' - q)$ avec $b \neq 0$, alors .. $b(q'-q)$. $= 0$ soit .... $q'-q=0$ ...., d'oùl'unicité.