Exercice 4.

Démontrer que pour tout entier naturel n, le produit $n(n+1)$ est divisible par 2.

1^er Cas : n pair

il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p$.

$$n(n+1) = 2p(2p+1) = 2\left(p(2p+1)\right)$$

donc $n(n+1)$ est divisible par 2.

2^ième Cas : n impair

il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2p+1$.

$$n(n+1) = (2p+1)(2p+1+1) = (2p+1)(2p+2)$$
$$= 4p^2 + 6p + 2 = 2(2p^2 + 3p + 1)$$

donc $n(n+1)$ est divisible par 2.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \mid n(n+1)}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2

2 divise $n(n+1)$