

Exercice 10.

On considère deux entiers relatifs a et b . Démontrer l'équivalence suivante :

$$7|(2a + 5b) \iff 7|(5a + 2b)$$

$$\exists k \quad 2a + 5b = 7k \iff 5a + 2b = 7k$$

$$7|(2a + 5b) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2a + 5b = 7k$$

(\Rightarrow) $\exists k' \in \mathbb{Z} \quad 5a + 2b = 7k' \iff 7|(5a + 2b)$

$$2a + 5b + \underbrace{5a + 2b}_{7k} = \underbrace{7a + 7b}_{7(a+b)} - 7k$$

$$= 7(a+b).$$

$7|(2a + 5b)$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}, 2a + 5b = 7k$

Ce qui donne $5a + 2b = 7(a+b) - 7k = 7(a+b-k)$

donc $7|(5a + 2b)$

$7|(5a + 2b)$ donc il existe $k' \in \mathbb{Z}, 5a + 2b = 7k'$

Ce qui donne $2a + 5b = 7(a+b) - 7k' = 7(a+b-k')$

donc $7|(2a + 5b)$

$$7|(2a + 5b) \iff 7|(5a + 2b)$$