

Exercice 13.

Pour tout entier relatif n , on pose : $a_n = 2n - 1$ et $b_n = 9n + 4$.

1. Déterminer un entier k indépendants de n tel que : Si d divise a_n et b_n , alors d divise k .
2. En déduire la liste des diviseurs communs éventuels a_n et b_n .
3. En déduire les diviseurs communs à 5117 et 23035. Quel est le PGCD de 5117 et 23035?

1)

Brouillon

$$\begin{cases} d|a_n \\ d|b_n \end{cases} \Rightarrow d|k \quad ?$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} d|a_n \\ d|b_n \end{cases} \Rightarrow d|(u a_n + v b_n)$$

$$-9 \begin{matrix} u \\ (2n-1) \end{matrix} + v \begin{matrix} (9n+4) \\ \end{matrix} =$$

$$\begin{cases} d|a_n \\ d|b_n \end{cases} \Rightarrow d | -9a_n + 2b_n, \quad \begin{matrix} -9a_n + 2b_n = -9(2n-1) \\ + 2(9n+4) = 17 \end{matrix}$$

$k=17$ convient.

b) $d|k$ donc $d \in \{-1; -17; 1; 17\}$

c) $a_n = 5117 \Leftrightarrow 2n-1 = 5117 \Leftrightarrow n = 2559$

$$b_n = 23035 \Leftrightarrow 9n+4 = 23035 \Leftrightarrow n = 2559$$

donc $\text{PGCD}(5117; 23035) = 17$