Exercice 15.

1. Montrer que si un entier naturel d divise $12n+7$ et $3n+1$ alors il divise 3.
2. En déduire que la fraction $\frac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible.

1) $d \mid 12n+7$ et $d \mid 3n+1$

$\Rightarrow \forall (u,v) \in \mathbb{Z}^2 \quad d \mid u(12n+7)+v(3n+1)$

Prenons $u=1$ et $v=-4$

$u(12n+7)+v(3n+1) = 1(12n+7)+(-4)(3n+1)$

$= 3$

Donc $d \mid 3$

2) Soit D un diviseur de $12n+7$ et $3n+1$ alors $D \mid 3$ donc $d=3$ ou 1.

Si $D=3$: $3 \mid 3n+1 \Rightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3n+1 = 3k$

$\Rightarrow 1 = 3k-3n$

$\Rightarrow 1 = 3(k-n)$

$\Rightarrow 3 \mid 1$ ce qui est faux.

Donc $D \neq 3$ donc $D=1$

et $\frac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible.