Exercice 18.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. On suppose que n est premier. Justifier que 1 est le seul diviseur de n inférieur ou égal à $\sqrt{n}$?
   En déduire que n n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$
2. Réciproquement, supposons que n n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ et montrons, en raisonnant par l'absurde, que n est premier ; on suppose donc que n n'est pas premier.
   L'ensemble des diviseurs de n (dans $\mathbb{N}$) autres que 1 et n étant non vide, il admet un plus petit élément m.
   a. Justifier que m est premier.
   b. Justifier qu'il existe un entier k tel que $1 < m \leq k < n$ et $n = mk$.
   c. En déduire que $m^2 \leq n$. Conclure.
3. Écrire un algorithme qui permet de déterminer si un entier n est premier.

1) n est premier ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.
Or $n \geq \sqrt{n}$ pour $n \geq 1$ donc le seul diviseur de n inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ est 1.
1 n'est pas premier, c'est le seul diviseur de n inférieur à n donc n n'a pas de diviseur premier.

2) $\boxed{\text{BROUILLON}}$

a) m plus petit diviseur de n.
Supposons m n'est pas premier
donc il existe un diviseur m, d différent de 1 et de m.
il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = dk$
Or $m | n$ donc $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $n = pm$.
$n = pm = pdk = dpk$ donc $d | n$.
Ce qui est impossible car m est le plus petit diviseur de n et que $d < m$.

b) $m | n$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$, $n = km$.
En particulier $k | n$ donc $k \geq m$ car m est le plus petit diviseur.
Ainsi $1 < m \leq k < n$

c) $m \leq k$
$\Rightarrow m \times m \leq k \times m$
$\Rightarrow m^2 \leq n$

On observe que $m \leq \sqrt{n}$
Or m est un diviseur premier de n.
L'hypothèse de départ est que n n'admet pas diviseur premier inférieur à $\sqrt{n}$.
Ce qui est contradictoire avec n n'est pas premier.

n est premier $\Leftrightarrow$ il n'existe pas de diviseur premier de n inférieur à $\sqrt{n}$.