Propriété 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

n est premier si, et seulement si, n n'a pas de diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ autre que 1.

équivaut à
$\Longleftrightarrow$
est équivalent à

Exercice 3.

Démonter la propriété précédente.

$\Rightarrow$]

Supposons n premier et qu'il existe $d \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ tel que $d|n$, $d \leq \sqrt{n}$ et d premier.

donc $d = n$ car n est premier

Or $d \leq \sqrt{n}$ ce qui est impossible.

$d|n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, n = dk$

$\Leftarrow$] Supposons que n n'a pas de diviseur premier, inférieur à $\sqrt{n}$.

Soit d un diviseur de n, $n = \frac{n}{d} \times d$

donc d et $\frac{n}{d}$ sont des diviseurs de n.

$\frac{n}{d} < \sqrt{n} \Leftrightarrow d > \frac{n}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow d > \sqrt{n}$

ce qui est impossible.

donc n est premier.