Exercice 9.

Démontrer que pour tout entier n, le nombre $n^3 - n$ est un multiple de 6.

Brouillon :

$n^3 - n = 6k$

$n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$

$6 = 2 \times 3$

$\left.\begin{array}{l} 2 \mid n(n-1)(n+1) \\ 3 \mid n(n-1)(n+1) \end{array}\right\} \Rightarrow 6 \mid n(n-1)(n+1)$

$n^3 - n = n(n-1)(n+1)$

(1) Mq $2 \mid n(n-1)(n+1)$

1ier cas : Si n pair

il existe $n' \in \mathbb{Z}$, $n = 2n'$

$n(n-1)(n+1) = 2n'(2n'-1)(2n'+1) = 2\left(n'(2n'-1)(2n'+1)\right)$

donc $2 \mid n(n-1)(n+1)$

2ème cas : n impair.

il existe $n' \in \mathbb{Z}$, $n = 2n'+1$

$5 \times 3 \times 2$
$= 2(5 \times 3)$
$= (2 \times 5) \times 3$

$n(n+1)(n-1) = (2n'+1)(2n'+1+1)(2n'+1-1)$

$= (2n'+1)(2n'+2)(2n') = 2(2n'+1)(2n'+2)(n')$

donc $2 \mid n(n+1)(n-1)$

(2) Montrons que $3 \mid n(n+1)(n-1)$

1ier cas : $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$n(n+1)(n-1) = 3k(3k+1)(3k-1) = 3(k(3k+1)(3k-1))$

donc $3 \mid n(n+1)(n-1)$

2ième cas : $n = 3k+1$, $k \in \mathbb{Z}$

$n(n+1)(n-1) = (3k+1)(3k+1+1)(3k+1-1) = (3k+1)(3k+2)3k$

$= 3(3k+1)(3k+2)k$ donc $3 \mid n(n+1)(n-1)$

3ième cas : $n = 3k+2$

$n(n+1)(n-1) = (3k+2)(3k+2+1)(3k+2-1) = (3k+2)(3k+3)(3k+1)$

$= (3k+2)\,3(k+1)(3k+1)$

$= 3(3k+2)(k+1)(3k+1)$

donc $3 \mid n(n+1)(n-1)$

$2 \mid n(n+1)(n-1)$

et $3 \mid n(n+1)(n-1)$

donc $6 \mid n(n+1)(n-1)$