

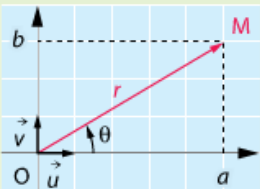
# Les formes d'un nombre complexe

**Rappels du résumé de cours.**

**Forme algébrique de  $z$  (rappel)**

C'est la forme  $z = a + bi$ .

**Module et argument de  $z$  (rappel)**



- Le *module* de  $z$  est le nombre réel  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
- $|z| = OM$ .
- Un *argument* de  $z$  non nul est une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \vec{OM})$ .
- Si on pose  $\arg z = \theta$ ,  
$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Forme trigonométrique (rappel)**

- Si  $|z| = r$  et  $\arg z = \theta$ , la **forme trigonométrique** de  $z$  est :  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ .
- Dans ce cas, on note aussi parfois  $z = [r, \theta]$ .

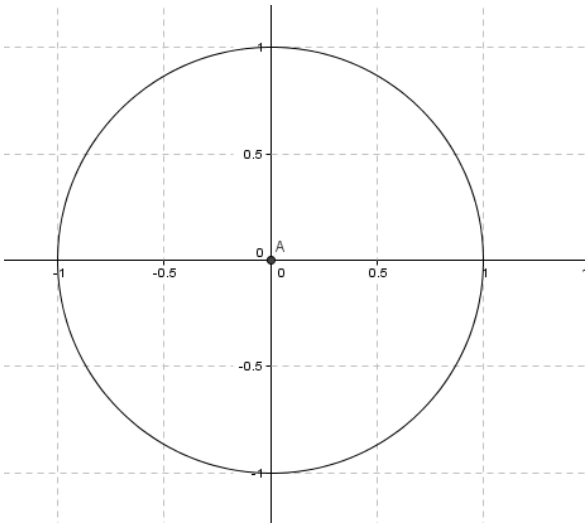
**Forme (ou écriture exponentielle)**

Si  $|z| = r$  et  $\arg z = \theta$ , la **formule (ou écriture) exponentielle** de  $z$  est :  
 $z = re^{i\theta}.$

Exercice préliminaire :

Etablir le tableau des valeurs remarquables :

|                |   |                 |                      |                 |                 |
|----------------|---|-----------------|----------------------|-----------------|-----------------|
| Angle $\theta$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| Cos $\theta$   | 1 |                 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |                 |                 |
| Sin $\theta$   | 0 |                 |                      |                 |                 |



## Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique.

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants. (On demande des valeurs exactes.) En déduire la forme trigonométrique de  $z$ .

- a)  $z = 1 - i$ ;                      b)  $z = 2 + 2i$ ;  
 c)  $z = -1 + i\sqrt{3}$ ;                d)  $z = -2i$ ;  
 e)  $z = -3$ ;                        f)  $z = -\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}$ .

Contrôler sur une figure les résultats obtenus.

**CORRIGÉ P. 419**

### 31. + Déterminer le module et un argument

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants. (On demande des valeurs exactes.)

- a)  $z = 1 + i$ ;                        b)  $z = -5i$ ;  
 c)  $z = -1$ ;                        d)  $z = 1 + i\sqrt{3}$ ;  
 e)  $z = \sqrt{3} + i$ ;                    f)  $z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ .

Contrôler sur une figure les résultats obtenus.

### 32. + Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique (suite)

Déterminer la valeur exacte du module et d'un argument du nombre complexe  $z$ . En déduire la forme trigonométrique de  $z$ .

- a)  $z = -1 + i$ ;                      b)  $z = 2 - 2i$ ;  
 c)  $z = \sqrt{3} - i$ ;                    d)  $z = -7i$ ;  
 e)  $z = -4$ ;                        f)  $z = 2$ .

### 33. ++ Même question qu'à l'exercice 32

- a)  $z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ ;    b)  $z = -2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ .

### Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique.

- a)  $\rho = 3$  et  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ;                b)  $\rho = 2$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ;  
 c)  $\rho = \frac{1}{2}$  et  $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ;            d)  $\rho = 1$  et  $\theta = \frac{5\pi}{4}$ .

**CORRIGÉ P. 420**

### 35. + Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique

Soit  $z$  un nombre complexe de module  $\rho$  et d'argument  $\theta$ . Écrire  $z$  sous la forme algébrique  $a + bi$  dans les cas suivants :

- a)  $\rho = 3$  et  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ;                b)  $\rho = 2$  et  $\theta = -\frac{\pi}{6}$ ;  
 c)  $\rho = 1$  et  $\theta = \frac{7\pi}{3}$ ;                d)  $\rho = 4$  et  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ .

### Forme exponentielle.

### 36. + Utiliser l'écriture exponentielle

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}; \quad z_2 = e^{2i\frac{\pi}{3}}; \quad z_3 = e^{-i\frac{\pi}{6}}; \quad z_4 = e^{-i\frac{\pi}{2}};$$

$$z_5 = e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}; \quad z_6 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} + \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

**CORRIGÉ P. 420**

### 37. + Passer de l'écriture exponentielle à la forme algébrique

Mettre sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = e^{i\pi}; \quad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}; \quad z_3 = 25e^{i\frac{\pi}{4}}; \quad z_4 = e^{i\frac{5\pi}{6}};$$

$$z_5 = 10e^{i\frac{\pi}{6}} \times 0,5e^{i\frac{\pi}{3}}; \quad z_6 = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

### 38. + Passer de la forme algébrique à une forme exponentielle

Donner une forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1; \quad z_2 = 2i; \quad z_3 = -3i; \quad z_4 = -2;$$

$$z_5 = 1 - i; \quad z_6 = 1 + i\sqrt{3}; \quad z_7 = 3 - 2i.$$

Pour  $z_7$  on donnera des valeurs approchées arrondies à  $10^{-2}$  du module et d'un argument.

**CORRIGÉ P. 420**

### 39. + Passer de la forme algébrique à l'écriture exponentielle (bis)

Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer le module et un argument, puis en déduire une notation exponentielle.

$$z_1 = \sqrt{3} + i; \quad z_2 = 1 - i; \quad z_3 = 1 - i\sqrt{3};$$

$$z_4 = \sqrt{3} + 3i; \quad z_5 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Les calculatrices et MAXIMA possèdent des fonctions qui permettent de passer d'une écriture à l'autre.

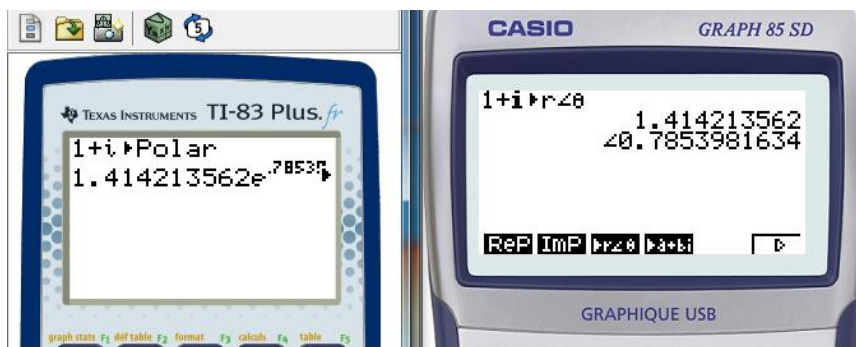
La forme exponentielle s'appelle forme polaire (polar form)

La forme algébrique s'appelle forme rectangulaire (rectangular form)

- Sur CASIO, on accède au menu CPLX par la touche OPTN
- Sur TI, on accède au menu CPX par la touche MATH.
- Dans MAXIMA, on accède aux calculs sur les complexes dans le menu SIMPLIFIER.

```
(%i2) z:1+i;
(%o2) %i+1

(%i3) polarform(%);
(%o3)  $\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$ 
```



### Solutions de quelques exercices

**31.**

a)  $|z| = \sqrt{2}$  ;  $\arg z = \frac{\pi}{4}$ .

b)  $|z| = 5$  ;  $\arg z = -\frac{\pi}{2}$ .

c)  $|z| = 1$  ;  $\arg z = \pi$ .

d)  $|z| = 2$  ;  $\arg z = \frac{\pi}{3}$ .

e)  $|z| = 2$  ;  $\arg z = \frac{\pi}{6}$ .

f)  $|z| = 1$  ;  $\arg z = \frac{\pi}{4}$ .

**32.**

a)  $\sqrt{2}$  ;  $\frac{3\pi}{4}$ .

b)  $2\sqrt{2}$  ;  $-\frac{\pi}{4}$ .

c)  $2$  ;  $-\frac{\pi}{6}$ .

d)  $7$  ;  $-\frac{\pi}{2}$ .

e)  $4$  ;  $\pi$ .

f)  $2$  ;  $0$ .

**33.**

a)  $|z| = 2$  ;  $\arg z = \frac{\pi}{3}$ .

b)  $z = 2 \left( -\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$  ;

$z = 2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$  ;

$|z| = 2$  ;  $\arg z = \frac{4\pi}{3}$ .

**35.**

a)  $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ .

b)  $z = \sqrt{3} - i$ .

$$c) z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$d) z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i.$$

**37.**

$$z_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

$$z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$z_3 = 25\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{25\sqrt{2}}{2} + \frac{25\sqrt{2}}{2}i.$$

$$z_4 = \cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

$$z_5 = 5e^{i\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{3}} = 5e^{i\frac{\pi}{2}} = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = 5i.$$

$$z_6 = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2} = i - i = 0.$$

**39.**

$$|z_1| = 2; \arg z_1 = \frac{\pi}{6}; z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

$$|z_2| = \sqrt{2}; \arg z_2 = \frac{\pi}{4}; z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

$$|z_3| = 2; \arg z_3 = -\frac{\pi}{3}; z_3 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

$$|z_4| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}; \arg z_4 = \frac{\pi}{3}; z_4 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$|z_5| = 1; \arg z_5 = \frac{4\pi}{3}; z_5 = e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$