Exercice de BAC : fonctions exponentielles.

EXERCICE 3 **6 points**

Lorsque l'on consomme de l'alcool, le taux d'alcool dans le sang varie en fonction du temps écoulé depuis l'absorption. Ce taux est appelé « alcoolémie » et est mesuré en grammes par litre (g/L).

Après l'absorption de trois verres d'alcool, l'alcoolémie d'une personne donnée, en fonction du temps (exprimé en heures), est modélisée par la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(t) = 2,5te^{-t}.$$

Partie A

1. Donner la valeur de l'alcoolémie de la personne considérée au bout de 2 heures.
2. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = 2,5(1-t)\mathrm{e}^{-t}$.

4. En remarquant que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ on a $f(t) = \dfrac{2,5t}{\mathrm{e}^t}$, déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ et donner une interprétation géométrique de cette limite.
5. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
6. Quelle est l'alcoolémie la plus élevée pour la personne considérée ?

Partie B

1. Sur une feuille de papier millimétré, tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On prendra 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 10 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.
2. En France, la législation autorise pour un conducteur une alcoolémie maximale de 0,5 g/L.
   Sachant que la personne a absorbé trois verres d'alcool à 12 h, à partir de quelle heure pourra-t-elle reprendre la route pour effectuer sans s'arrêter un trajet d'une durée d'une heure ?
   On utilisera la représentation graphique de la fonction f.

<u>Eléments de correction</u>

Lorsque l'on consomme de l'alcool, le taux d'alcool dans le sang varie en fonction du temps écoulé depuis l'absorption. Ce taux est appelé « al
lémie » et est mesuré en grammes par litre (g/L).

Après l'absorption de trois verres d'alcool, l'alcoolémie d'une personne donnée, en fonction du temps (exprimé en heures), est modélisée p
fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(t) = 2,5te^{-t}$.

Partie A

1. La valeur de l'alcoolémie de la personne considérée au bout de 2 heures est $f(2)$.
   $f(2) = 2,5 \times 2 \times \mathrm{e}^{-2} = 5\mathrm{e}^{-2} \approx 0,677$.
2. Montrons que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = 2,5(1-t)\mathrm{e}^{-t}$.
   $f'(t) = 2,5\mathrm{e}^{-t} + 2,5t(-\mathrm{e}^{-t}) = 2,5\mathrm{e}^{-t}(1-t)$.
   Nous avons bien obtenu le résultat attendu.

4. En remarquant que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ on a $f(t) = \dfrac{2,5t}{\mathrm{e}^t}$,

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$; il en résulte que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$.

L'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de l'infini.

5. Déterminons les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Étudions le signe de $f'(t)$.

Pour tout t, nombre réel positif, $2,5\mathrm{e}^{-t} > 0$ par conséquent le signe de $f'(t)$ est celui de $1 - t$.

Sur $\mathbb{R}$ $\quad 1 - t > 0 \iff t < 1$. Il en résulte si $t \in [0\,;\,1[$ alors $f'(t) > 0$ et si $t \in]1\,;\,+\infty[$ alors $f'(t) < 0$.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

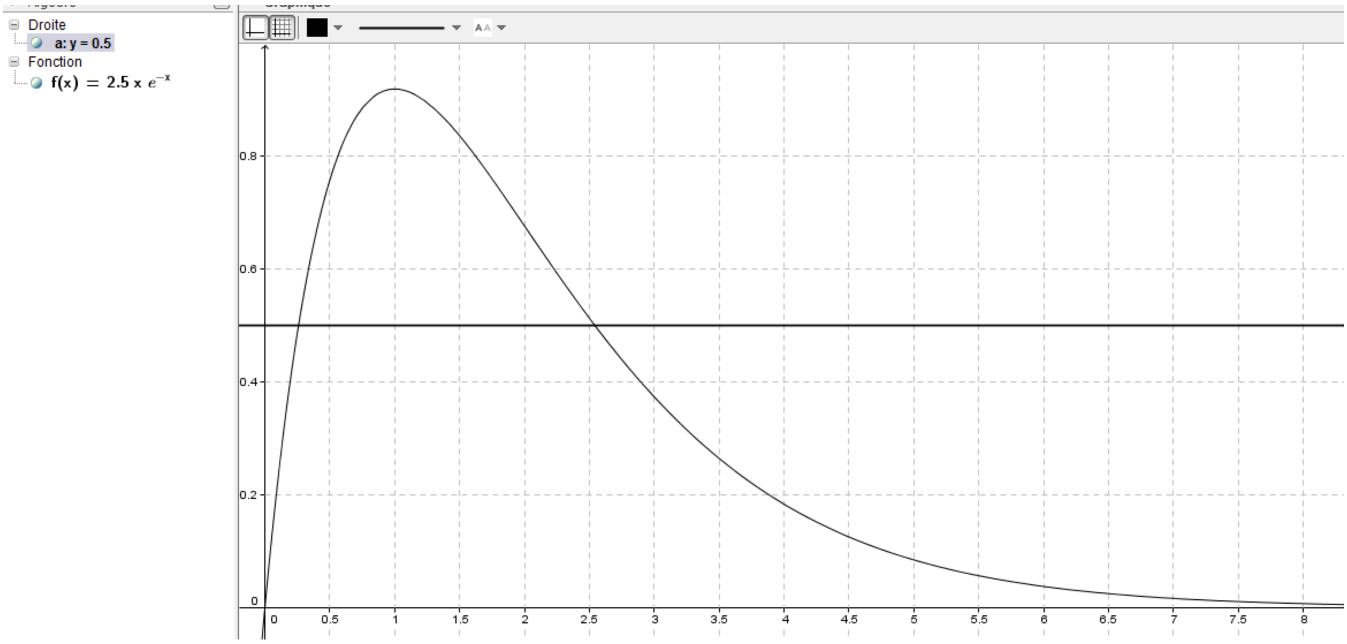
La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,1[$ car $f'(t) > 0$ sur cet intervalle.

Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

La fonction f est strictement décroissante sur $]1\,;\,+\infty[$ car $f'(t) < 0$ sur cet intervalle.

6. La fonction f admet un maximum en 1, valant $2,5\mathrm{e}^{-1} \approx 0,92$.

L'alcoolémie la plus élevée pour la personne considérée est 0,92 g/L.



Partie B

1. La courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ a été tracée.
2. En France, la législation autorise pour un conducteur une alcoolémie maximale de 0,5 g/L.

Sachant que la personne a absorbé trois verres d'alcool à 12 h, déterminons à partir de quelle heure, elle pourra reprendre la route pour effectuer sans s'arrêter un trajet d'une durée d'une heure. Lisons sur le graphique l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 0,5$. Nous lisons environ 2 heures et trente-cinq minutes.

Elle pourra partir vers 14 heures trente-cinq minutes.